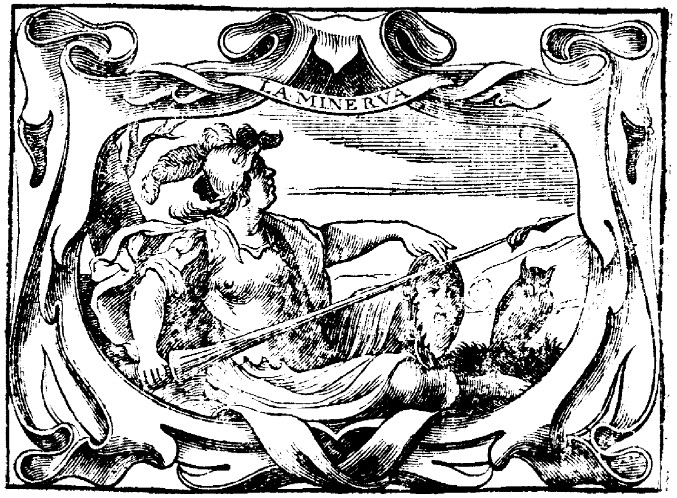
DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA.

DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA,

OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

AVTHORE
F. STEPHANO DE ANGELIS
VENETO,

Ordinis Iesuatorum S. HIERONYMI, in Veneta Prouincia Definitore Prouinciali.



VENETIIS, MDCLX.

Apud Ioannem La Noù.

SVPERIORVM PERMISSV.

Eminentissimo & Reuerendissimo D.D.

GREGORIO BARBADICO

Patritio Veneto, S.R.E. Cardinali Amplissimo, & Bergomensium Vigilantiss. Antistiti.

FR. STEPHANVS ANGELI VENETVS
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi in Veneta Prouincia Prouincialis Definitor.

O. F. O.

LIBELLVM hunc de Infinitis Spiralibus tibi sisto Eminentissime Princeps, & Præsul, amplissimoq. nomini, ac dignitati inscribo obsequentissimus. Pallesceret sanè coram tui præclarissima Purpura, quæ Maiestate, & Virtute vernat ardenter, vilitas ingenij, & tenuitas muneris, nisi aliundè, & tui lenissima vrbanitas, & mei deuictissima deuotio, concepta iam vota enixè firmarent. Spirales istæ lineæ, non aliundè quam

ab.

ab. E. T. spiritum sumerent, qui verè Geometrarum Mecenas peritissimus ad te colendum allicis quoscumque eiusdem generis seduliores profectus. Nec inanis, & futilis labor, quem complent spirales lineæ. Namquè circà vnicam earum speciem Archimedis ingenium fuisse aliquando versatum iactant prò summo pretio; quidni si E. T. tractationem dè Infinitis libare decerno? Profectò, à tui meritorum celsitudine decet vt hę lineæ punctum ducant, & in ipsam desinant, titulis luculentissimis protrahantur, patrocinio, ac tutela firmissima circumuallentur. Ex hinc, posito Inuidiæ obice, illo saltem gloriabuntur fato, quod E. T. Nomen ipsis circumliget gloriosè verticem, adeò vt si Cerua quondam Cęsaris circà collum explicans idioma venantium iacula euadebat illæsa; latrantium murmura & istæ paginæ spernent, exprimentes, quibus imprimuntur notis tutissimum sibi ipsis deditum pręsidium. Ergò opella hęc gloriosior cæteris prodeat, iam publicis plausibus excipienda, quia E. T. insignibus, & stemmatibus ditata, si vel ipsius Famæ potissima pręconia non lucretur, nihil se fuisse adeptam arbitratur. Nobilissimæ sobolis auitis laudibus, de te vnicè, & optimè superbientibus, attramenta hęc decorè linire vanum duco. Vnum namq. illud sufficiat, in E. T. specimen domesticas trabeas, infulas, & prętextas conspiraße vniuersas, quò electiori tandem vt par erat, ornatissimè amicireris paludamento. Purpura, qua nunc primùm indueris, (licèt ipsa longè ante dignissimus,) carbasa iam dat ventis, vt nuperus Iason ad vellus aureum speciosè conquirendum, scilicet ad supremi honoris fastigia, cordibus cunctis auras tranquillas halantibus postremò prosperè appellas. Cæterum mea Mathesis, quæ E. T. litandas spirales lineas elucubrauit, ad postremum vsquè spiritum semper lineas deuotionis dicaturam pollicetur. Ità quod Apellis æmulatrix nulla sit dies, quæ in humillimæ obseruantiæ titulum non signet lineam. Valeas Eminentissime Princeps, & optime Antistes, ac fęlix viuas. Astra te diutius pietatis, & Virtutis tueantur seruatorem incolumen.

Scribebam Venetijs Kal. Julij Anno 1660.

L E2

LECTORI BENEVOLO.

EN Tibi, Amice Lector, Opusculum Geometricum, *DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA*, non semel, aut bis, sed pluribus, ac iteratis vicibus pollicitum. Spirales, Helices, Implexæ, seu Volutæ lineæ de genere illorum sunt censendæ, quæ mirabilia, seu portenta geometrica iure merito sunt nuncupanda. Siquidem (vt concinnè Dauid Riualtus Archimedis Commentator pronunciat.) *Admissa Helica, & rite vt ars ipsius fert fabrefacta, nihil est in tota geometria abstrusum, & adhuc inuium, quod non denudetur, patefiat, & aperiatur.* Ast si ad ingens in rebus Geometricis Spiralis lineæ momentum corroborandum cætera deessent testimonia, vnicum me hercle sufficere arbitrandum: maximum scilicet Archimedis ingenium circa eas aliquando fuisse versatum; de ipsisque iustum volumen edidisse, in quo naturas, ac proprietates earundem ita expendit, vt sint posteris vsui maximo, & veluti cerebri ingeniosi portenta summæ admirationi. Cæterùm haud vnicus Archimedes extitit indagator spiralium proprietatum: sed ipsi se adiunxere quamplures, inter quos mirificè enitent Monarchiæ Geometricæ duo splendidissimi proceres, Pappus Alexandrinus lib. 4. collecti. Mathemat. & Franciscus Vieta lib. 8. responsorum Mathematicorum. Paulus Guldinus Sancto-Gallensis, ille celeberrimus Geometra sapientissimæ Societatis Iesù, & Centrobaryca auctor famosus (at Caualenianorum indiuisibilium contemptor, & irrisor, qui dum indiuisibilia spreuit, ipsisque irrisit, se ipsum ridiculum præbuit) altius omnibus volatum sumpsit, conatusque est ipsam spiralem lineam ad mensuram determinatam redigere, atque ipsius centrum grauitatis assignare: at conatu irrito, & Icari fine, vt ipsemet in lib. 2. Centrobarycæ cap. 2. & infra fatetur, & prolixè explanat in capit. 3. Pronuper Ismael Bullialdus, vt lucem afferret ijs, quæ Archimedes de spiralibus conscripsit, totam rem spiralicam iterum proprio Marte composuit, & publici iuris fecit Parisijs anno 1657.

Sed inter cæteros spiralium proprietatum venatores extitere etiam duo illa maxima Geometrarum Italorum

Italorum fulgentia luminaria, nimirum Bonauentura Caualerius, & Euangelista Torricellius. Hic quidem incidenter in lib. de dimens. parabolæ proposit. 17. vt ex proportione circuli ad spatium spirale ab Archimede olim tradita, quadraturam ipsius ordinariæ parabolæ adinueniret. Ille verò ex instituto in lib. 6. Geomet. Indiuisib. vt ex analogia ab ipso animaduersa inter spirale spatium, & parabolam versante, ex mensura ipsius parabolæ prius tentata, omnia symptomata circa spiralium spatiorum mensuram denuò medijs ab alijs intentatis, nec aliquando excogitatis, patefaceret.

Verum enim vero omnes superius recensit geometræ, & plures, pluresque alij speciatim haud nominati, qui spiralibus incubuere aliquando, vnicam ipsarum speciem amplexati fuere: eam nimirum quæ antiquitùs ab Archimede ipsomet, & Conone agnita fuit: quamque nos in posterum linearem vocitabimus. Cæterum infinitas spiralium species (quod sciamus) nemo ante nos mundo publicauit. Non ergo putamus rem tibi ingratam fore futuram, Benigne Lector, quæ circa infinitas species spiralium linearum aliquando excogitauimus, communicare. Sed ante omnia causæ speculationis huiusce accipe historiam.

Vndecim ab hinc annis circiter dum Romæ degeremus, & dum inter geometricos Tyrones enumeraremur, iucundissimum existimabatur à nobis quotiescunque datum fuisset suauissima consuetudine, ac excellentissima doctrina perfrui trium summorum virorum, à quibus nunquam absque lucro discedebamus. Erant hi Michael Angelus Riccius Geometrarum Italorum Coryphæus, & post Caualerij, ac Torricellij fatum, geometricæ maiestatis italicæ præsidium præcipuum: Renatus Franciscus Slusius Leodiensis ingeniorum Phænix, & maximum humanæ intelligentiæ portentum: & Ricardus Albius Anglus pietate, sanguine, & eruditione nobilissimus, atque suo Hemisphærio dissecto clarissimus. Accidit ergo die quadam, de more cum præfato Riccio de rebus geometricis verba habentes, vt mutui discursus subiectum ipsæ essent infinitæ parabolæ, & caualeriana indiuisibilium geometria: cumque ad sextum illius librum deuentum esset incidenter, audiuimus Riccium asserentem, ad similitudinem Caualerij, infinitas spirales posse mensurari, cui negotio sedulo incumbere ab ipso etiam fuimus sollicitati. Ast tunc temporis nimis imbecilles, ac tenues in nobis erant geometricæ vires. Tyrocinium etenim percurrebamus, & lacte dumtaxat enutriebamur; vixque dabatur ea posse percipere, quæ Caualerius molitus fuerat; tantum aberat, vt ipsum imitari liceret, tamque in altum conscendere. Quapropter euenit, vt labore perterriti, statim infinitæ è mente spirales exierint. Verùm anno 1658. post libelli nostri sexaginta problematum geometricorum impressionem, fato accidit, vt Venetijs in Bibliotèca Mineruæ commorantes, ad nostras peruenerit manus opus verè aureum Andreæ Tacquet Mathematici Excellentissimi, ac solertissimi Fulgentissimæ Societatis Iesù, *Cylindrica, & Annularia nuncupatum*. Quod reuoluentes, citius dicto incidimus in scholium prop. 12. lib. 1: in quo vocatus à nemine, vltrò seipsum constituit spectabilissime indiuisibilium methodi iudicem; contraque ipsam non minus inclementem, quam iniustam sequentem profert sententiam. *Methodum demonstrandi per indiuisibilia, vel (vt ego appellare soleo) per heterogenea, quam nobilis geometra Bonauentura Caualerius in lucem protulit, pro legitima, ac geometrica admittendam non existimo, &c.* (Sed quicquid autumet ipse, pro indiuisibilibus est veritas ipsamet, stantque illi omnes præclarissimi geometræ, quos in epistola ad lectorem operis nostri de Infinitis Parabolis recensuimus: quibus nuperrime vltrò se associauit Vincentius Viuiani in lib. 1. de Maximis, & Minimis monito post proposit. 17. vbi ait. *Vt hoc loco, ex aduerso indirectæ antiquorum viæ per duplicem positionem, luce clarius pateat quantum facilitatis, breuitatis, atque euidentiæ nasciscatur è noua, directaque methodo (rectè tamen, cautèque vsurpata) acutissimi Geometræ Caualerij, per indiuisibilium doctrinam nobis amicissimam &c.*) Illicò Tacquet exemplar pecunia proprium fecimus; ac diligentissimè ipsi studuimus; doctrinasque nouas, & peregrinas in ipso comprehensas semper admirati fuimus. Sed animaduertimus mancum ipsum extitisse, quia Caualerianis indiuisibilibus aduersabatur, veluti fusè explicauimus in schol. vltimo lib. 2. de Infinit. parab. Hæc igitur vnica, & genuina causa impullit nos quædam rimari, in quibus Tacquet videbatur deficere. Cumque geometrica inuenta facillime prodeant ex alijs prius animaduersis: agerque geometricus adeo sit fertilis, vt copiosissimos fructus illis reddat, qui mentis ligone ipsum effodiunt: hinc ortum duxit, vt ea omnia colligeremus, quæ in dictis libris de Infinit. parab. euulgauimus: & paulo post breui temporis interstitio, quę in nostris Miscellaneis Hypperbolico, & Parabolico, ac in Geometrico publicauimus. Porrò dum res ad infinitas parabolas attinentes pertractaremus, hæque nobis iam sat familiares apparerent, denuo infinitæ sperales in mentem deuenere: atque maturè discussa, & pensitata analogia à Caualerio agnita inter spiralem archimedeam, & parabolam quadraticam; videbatur nobis ipsam ad infinitas spirales, & infinitas parabolas non multo labore extendi posse. Et quidem determinatè statueramus ab initio opusculum de infinitis spiralibus pro quinto subnectere quatuor libris de infinitis parabolis: & hac de causa dumtaxat concinnauimus in lib. 1. propositiones 23. & 24. lemmaticas pro spiralibus, & nullis in dictis libris ordinatis inseruientes. Sed varijs de causis coacti fuimus illud opus citissimè absoluere, ac tam impolitum, vt apparet, publici iuris facere, & opusculum de infinitis spiralibus ad hoc vsque tempus reseruare. Hæc ergo, Benigne Lector, vera est, & vni-

& vnica inuentorum nostrorum historia: quam candide tibi tradidimus, vt nullus laude defraudetur emerita. De infinitis namque spiralibus nescimus quempiam verba fecisse. Sed prima ad hæc rimanda incitamenta à nobilissimo Geometra Riccio habuimus. An verò infinitæ spirales, quas in posterum sumus explicaturi illæ sint eædem, quas Riccius in votis olim habebat, penitus ignoramus. Ast quomodocunque sit, sequentia omnia proprio Marte compillauimus; & distintius quam licuit Tibi communicare conati fuimus, vt à simili labore subleueris. Sequentia percurre. Alia, fauente Deo, is succedent. Vale.

Noi

Noi Reformatori dello Studio di Padoa.

HAuendo osseruato per fede del P. Inquisit. non esserui nel Libro intitolato De Infinitorum Spiralium Spatiorum del P. F. Steffano de Angelis cosa contro la Santa Fede, e parimente per attestato dal Segretario nostro niente contro Prencipi, ò buoni costumi, concedemo licenza, che possi essere stampato, douendo osseruarsi gl'ordini, & esserne presentate due copie per le presente Librarie di Padoa, e di questa Città,

Dat. dal Magist. nostro li 27. Agosto 1660.

Zuanne Donado Ref.
Nicolo Capello Ref.

Alemante Angelo Donini Segr.

Facul-

Facultas Reuerendissimi Patris Generalis.

Laudetur Iesus Christus.

OPus inscriptum, ***De Infinitorum Spiralium Spatiorum Mensura.*** compositum ab Admodum R. P. Stephano de Angelis Veneto Professo Nostri Ordinis Iesuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat necessarias licentias, & approbationes, quæ de iure sunt necessariæ &c. In quorum fidem præsentes manu propria subscripsimus, ac proprio Nostri Officij sigillo muniuimus.

Datum Brixiæ in Nostro Monasterio Corporis Christi, die 28. Iunij 1660.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Iesuat.

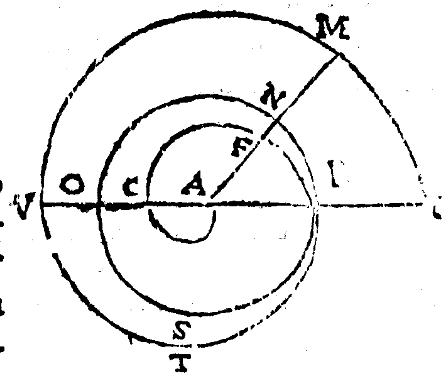
DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA,

OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

ARchimedes Geometrarum facile Princeps in aureo illo libello, quem de spiralibus, seu Helicibus conscripsit, ante cætera, naturam ipsarum luculenter explanat, definiens. Spiralem lineam fore illam nuncupandam, quæ à duplici motu æquabili, eodemque peracto tempore ortum ducit: nimirum, semidiametri dati circuli circa centrum immotum: & centri interim semidiametrum ipsam permeantis. Ità etenim loquitur. *Si recta linea in plano, altero eius termino quiescente circumferatur, donec ad locum redierit vndè primo cæpit moueri, & simul cum hac circumducta linea punctum feratur & ipsum sibi* *ipsi æquali semper velocitate moueatur secundum ipsam lineam motam, incipiatque à termino lineæ quiescente versus alterum eius punctum, huiusmodi spiralem lineam in plano describet.* Vt e.g. in schem. seq. considèremus semidiametrum A R, immoto puncto A, ciari æquabiliter, adeo vt describat circulum R S O N R, interim verò etiam punctum A, moueatur æquabiliter per A R, adeo vt eodem tempore punctum R, describat peripheriam R S O R, punctum verò A, perueniat ad R. Lineam curuam A C F R, ortam ex duplici hoc motu æquabili appellat Archimedes lineam spiralem primæ reuolutionis. Sicuti spatium A C R A, contentum linea curua prædicta, & recta A R, vocat primum spatium. Circulum cuius semidiameter A R, circumscriptum dicto spatio, primum circulum. Punctum A, principium lineæ spiralis. Positionem lineæ A R, à qua incepit circulatio, principium circulationis. Si autem radius A R, intelligatur duplicatus in R G, vel triplicatus &c. & motus continuetur vt prius: appellat Archimedes spirales secundæ circulationis; tertiæ; &c. idem dicit de spatijs, & circulis. Sed hæc omnia locupletius percipientur ipsomet Archimede inspecto, sicuti & nostra sequentia: namque nos in sequentibus omnes Archimedis terminos passim vsurpabimus.

At nos vniuersalius supponimus generari spirales. Supponimus enim cum Archimede generari vtique ex duplici motu eorundem mobilium: quorum ille, qui fit à centro permeante semidiametrum,

sit semper æquabilis; ast ille, qui fit à semidiametro fixa in centro, sit vel æquabilis, vel variè acceleratus. Si ergo moto æquabiliter A, per A R, etiam A R, fixa in A, æquabiliter gyretur per circumferentiam R S O R: linea A C F R, genita ex duplici tali motu, vocatur à nobis prima spiralis, seù linearis, quæ est Archimedea. Si verò puncto A, æquabiliter moto per A R, interim A R, moueatur motu taliter accelerato, vt spatia R S, R S O, &c. peracta, sint vt quadrata temporum in quibus peraguntur: linea A C R, vocetur secunda spiralis, seu quadratica. Si verò A R, moueatur motu taliter accelerato, vt spatia R S, R S O, sint vt cubi temporum: Illa linea dicetur tertia spiralis, seù cubica. Et sic in infinitum, secundum quod spatia peracta sunt ad inuicem, vt altiores temporum, in quibus peraguntur, potestates.



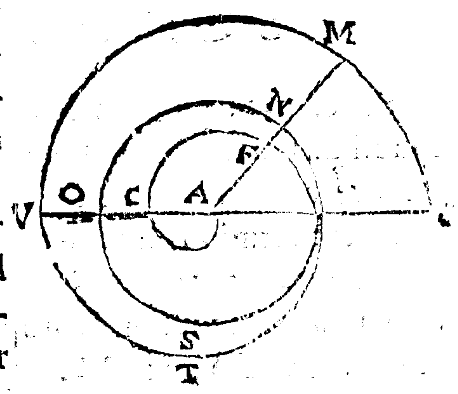
Si verò semidiametro A R, producta in G, adeo vt potestas G A, eiusdem gradus cum spirali sit dupla similis potestatis A R. v.g. in spirali lineari, sit G A, dupla A R: in quadratica sit quadratum G A, duplum quadrati A R: in cubica cubus sit duplus cubi, &c. & intelligamus continuari motus priores, secundum quod explicatum fuit supra ex Archimede in spirali secundæ reuolutionis: lineæ genitæ, spatia, circuli, &c. dicendi sunt secundæ reuolutionis, &c. Idem dicendum si potestas AR, eiusdem gradus cum spirali intelligeretur triplata, quadruplata, &c. Spirales etenim, spatia, &c. dicerentur tertiæ reuolutionis, quartæ, &c. Hæc omnia nullo negotio percipientur à viris Archimedeis: ipsum enim & nunc, & in sequentibus imitabimur.

PROPOSITIO I.

Si in quamcunque infinitarum spiralium, ortam ex prima reuolutione, ab initio ipsius incidant duæ lineæ, quę producantur vsque ad circumferentiam primi circuli. Arcus circuli in pręcedentia contenti inter initium circulationis, & ductas lineas, erunt ad inuicem, vt potestates incidentium in spiralem eiusdem gradus cum spirali.

ESto quælibet ex infinitis spiralibus ACFR, orta ex prima reuolutione, & esto primus circulus RSOR, & in spiralem incidant ab initio A, duæ rectæ AC, AF, quæ occurrant circumferentiæ in O, & N. Dico circumferentiam RSO, esse ad circumferentiam RSON, vt potestas AC, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AF. V.g. in prima spirali, seu lineari, vt AC, ad AF. In sec. hoc est quadratica, vt quadratum AC, ad quadratum

dratum AF. In cubica, vt cubus AC, ad cubum AF. Et sic in infinitum. Præsens propositio parùm diuersè ostendetur à modo, quo demonstratur ab Archimede in lineari in proposit. 14. Quoniam enim AC, est ad AF, vt tempus motus per AC, puncti A, ad tempus motus eiusdem puncti A, per AF (quia motus puncti A, supponitur æquabilis): ergo & vt quælibet potestas AC, ad homogeneam potestatem AF, sic similis potestas temporis motus A, per AC, ad similem potestatem temporis motus A, per AF. Sed vt potestas temporis eiusdem gradus cum spirali motus A, per AC, ad similem potestatem motus per AF, sic ex hypothesi, arcus RSO, ad arcum RSON. Ergo & arcus ad arcum erit, vt potestas AC, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AF. Quod &c.



COROLLARIVM.

Ergo conuertendo, & diuidendo, erit arcus NO, ad arcum OSR, vt excessus potestatis AF, eiusdem gradus

gradus cum spirali supra similem potestatem AC, ad similem potestatem AC.

SCHOLIVM.

Sed cum, vt potestas FA, eiusdem gradus cum spirali ad similem potestatem CA, sic FA, ad vltimum terminum proportionis FA, ad CA, continuatæ ad tot terminos quotus est numerus spiralis vnitate maior: erit & arcus NOSR, ad arcum OSR, vt FA, ad hanc vltimam proportionalem. Nempe in lineari vt FA, ad CA. In quadratica, vt FA, ad tertiam proportionalem minorem ipsarum FA, CA. In cubica ad quartam: Et sic in infinitum. Et diuidendo, erit NO, ad OSR, vt excessus FA, supra vltimam minorem proportionalem ad ipsam.

PROPOSITIO II.

Sint quamcunque infinitarum spiralium ex alijs reuolutionibus genitam, & in sibi circumscriptum circulum incidant duæ lineæ, vt prius. Potestates incidentium in spiralem eiusdem gradus cum spirali erunt ad inuicem, vt arcus prædicti, vna cum tot integris peripherijs, quotus est numerus reuolutionum vnitate minor.

SEd potestate semidiametri AR, congruente spirali, duplata, triplata, &c. in G, vt explicatum fuit supra, intelligamus continuatis motibus, spiralem

ralem ACFR, continuatam fore in TVMG, &c. cui AC, AF, incidant in V, M. Dico in prima spirali, esse AM, ad AV, vt tota circumferentia circuli RSOR, tot vicibus accepta, quotus est numerus reuolutionum vnitate minor, vna cum arcu NOSR, ad eundem numerum totius circumferentiæ RSOR, vna cum arcu RSO. In secunda, sic esse quadratum AM, ad quadratum AV. In tertia, sic cubum ad cubum. Et sic in infinitum. Diximus autem AM, AV, esse in prædictis rationibus cum circumferentijs circuli cuius semidiameter AR, quia isti arcus sunt in eadem ratione cum similibus arcubus circuli cuius semidiameter AG, ad cuius peripheriam intelligendæ sunt extensæ AV, AM; quia sunt concentrici.

Hæc proposit. ostendetur ad modum superioris, & ad modum Archimedis in proposit. 15.

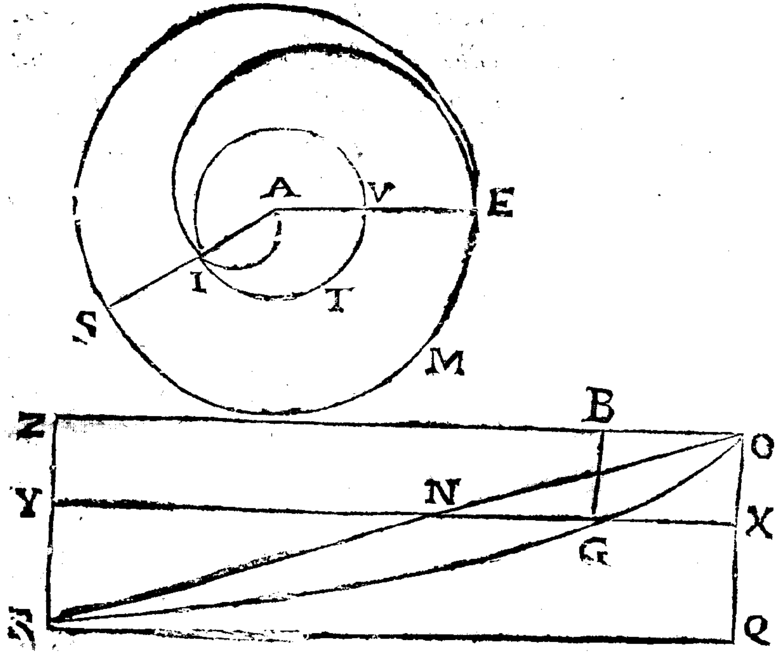
COROLLARIVM.

Ergo conuertendo, & diuidendo, erit excessus potestatis AM, eiusdem gradus cum spirali supra similem potestatem AV, ad potestatem AV, vt arcus NO, ad arcum OSR, vna cum tot integris peripherijs RSOR, quotus est numerus reuolutionum vnitate minor.

PROPOSITIO III.

Si à semidiametro primi circuli circumscripti spatio spirali abscindatur qualibet linea, & centro initio, semidiametro abscissa describatur circuli peripheria. Erit tota circumferentia primi circuli, ad peripheriam descripti circuli contentam inter lineam initium reuolutionis, & spiralem, in præcedentia, vt potestas radij primi circuli vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem abscissæ.

IN schem. seq. abscissa AV, ab AE, semidiametro primi circuli circumscripti primo spatio cuiuscunque spatij spiralis AIEA, centro A, interuallo AV, describatur circulus VTIV. Dico totam circumferentiam EMSE, esse ad circumferentiam VTI, vt potestas EA, vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV. V.g. in lineari, vt quadratum ad quadratum. In quadratica, vt cubus ad cubum. Et sic in infinitum. Namque, ratio circumferentiæ EMSE, ad VTI, componitur ex ratione ipsius ad totam circumferentiam VTIV, & huius ad VTI, (nempe circumferentiæ EMSE, ad EMS.) Sed vt EMSE, circumferentia ad totam VTIV, sic EA, ad AV; & vt eadem EMSE, ad EMS, sic ex proposit. pri. potestas EA, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AI, seu AV. Ergo & ratio circumferentiæ ad circumferentiam componetur ex his duabus



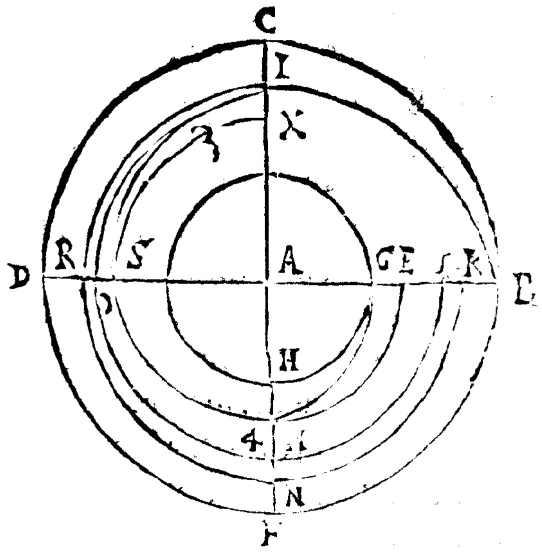
duabus rationibus: nempe circumferentia ad circumferentiam erit, vt potestas EA, vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV. Quod &c.

PROPOSITIO IV.

Si in excessu semidiametri circuli circumscripti cuilibet spatio Helicis à primo, supra semidiametrum circuli vnitate minoris, sumatur punctum; & centro initio, interuallo assumpto puncto, describatur circuli peripheria. Erit tota *ta circumferentia maioris circuli, ad portionem circumferentiæ descriptæ, contentam inter spiralem, & lineam initium reuolutionis, vt factum sub semidiametro circuli maioris, in excessum potestatis ipsius eiusdem gradus cum spirali, supra similem potestatem minoris circuli, ad factum sub semidiametro descriptæ circumferentiæ, & sub excessu potestatis ipsius eiusdem gradus cum spirali, supra similem potestatem semidiametri circuli minoris.*

IN schem. seq. supponamus GMSIBG, esse quodcunque spatium cuiuscunque spiralis à primo, nimirum vel secundum, vel tertium, vel quartum, &c. & circulus radij AB, sit circulus eiusdem numeri spatio circumscriptus, vt circulus radij AG, sit ipso vnitate minor: nimirum si ipse sit secundus, sit circulus radij AG, primus: si tertius, secundus: &c. & inter GB, accepto puncto E, intelligatur circulus radij AE. Dico peripheriam radij AB, esse ad peripheriam EM, contentam inter AB, & spiralem in M, vt factum sub BA, in excessum potestatis BA, eiusdem gradus cum spirali, supra similem potestatem AG, ad factum sub EA, in excessum potestatis ipsius eiusdem cum spirali gradus, supra similem potestatem AG. V. g. in prima spirali, vt rectangulum ABG, ad rectangulum AEG. In sec. vt factum sub AB, in differentiam quadratorum AB, AG, ad factum sub AE, in excessum quadrati ipsius supra quadratum AG. Et sic in infinitum in altioribus spiralibus.

Ratio



Ratio enim circumferentiæ radij AB, ad circumferentiam EM, de foris sumpta circumferentia radij AE, componitur ex ratione ipsius ad circumferentiam radij AE, & huius ad circumferentiam EM. Sed vt circumferentia radij AB, ad circumferentiam radij AE, sic radius AB, ad radium AE: & vt circumferentia radij AE, ad arcum EM, sic circumferentia radij AB, ad arcum BF. Quare ratio circumferentiæ radij AB, ad arcum EM, componetur ex rationibus AB, ad AE, & circumferentiæ radij AB, ad arcum BF. Verum, quoniam ex proposit. secund. est vt circumferentia radij AB, tot vicibus accepta quotus est numerus spatij, ad eandem acceptam secundum numerum vnitate

 mino-

minorem, simul cum arcu BF, sic potestas BA, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AM, seu AE: ergo & vt vnica peripheria radij AB, ad arcum solum BF, sic excessus potestatis AB, eiusdem gradus cum spirali, supra similem potestatem AG, ad excessum potestatis AE, itidem eiusdem gradus cum spirali, supra similem potestatem AG (ex genesi enim spiralium, potestatis AB, eiusdem gradus cum spirali, potestas AG, continet tot partes, quotus est numerus spatij vnitate minor, & differentia potestatum vnicam.) Ergo ratio peripheriæ radij AB, ad arcum EM, componetur quoque ex ratione AB, ad AE, & ex ratione excessus potestatis AB, eiusdem gradus cum spirali, supra similem potestatem AG, ad excessum similis potestatis AE, supra eandem potestatem AG. Nempe erit ad ipsum, vt factum sub AB, in priorem excessum, ad factum sub AE, in posteriorem excessum. Quod erat ostendendum.

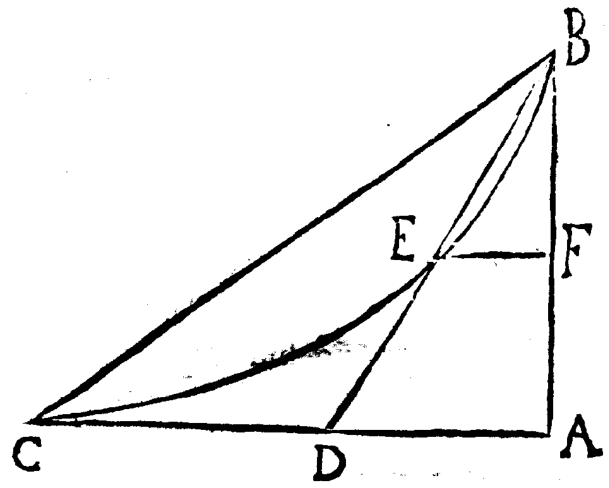
SCHOLIVM.

Quæ sint infinita trilinea parabolica explicatum fuit initio primi libri eorum, quos de infinitis parabolis euulgauimus. Diximus enim ibidem, nos pro talibus trilineis intelligere spatia, quæ sunt excessus parallelogrammi circumscripti infinitis semiparabolis supra ipsas. De infinitis trilineis in proposit. 23. & 24. eiusdem libri ostendimus duas proprietates, quæ, quoniam statueramus ab initio cum opere de infinitis parabolis edere etiam hoc opusculum de infinitis spiralibus, in harum gratiam explicatæ fuere. Verum, quoniam multa nos coegerunt absoluere quamprimum opus illud, citatæ propositiones tunc temporis proprium finem haud fuerunt consecutæ. Cum autem sint in præsentiarum necessariæ, determinauimus, vt cuilibet sint in promptu, ipsas ex citato opere transcribere; sed nunc vigesimamtertiam, infra suo loco, vigesimamquartam. Sit ergo.

PROPOSITIO V.

Si à vertice cuiuscunque trilinei à primo ducatur linea in basim secans curuam parabolicam: & per punctum vbi secat curuam ducatur vsque ad diametrum parallela basi. Erit basis trilinei ad sui partem interceptam inter ductam, & diametrum, vt potestas diametri trilinei vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem diametri trilinei ad verticem.

SIt quodlibet trilineum à primo (nempe primo excepto, quod est triangulum) CBA, cuius vertex B, diameter BA, & à vertice B, ducatur BD, in basim secans curuam in E & per E, ducatur EF, parallela CA. Dico CA, esse ad AD, vt potestas AB, vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem BF. V.g. in trilineo quadratico, erit CA, ad AD, vt AB, ad BF. In cubico, vt quadra-



quadratum AB, ad quadratum BF. In quadrato-quadratico, vt cubus AB, ad cubum BF. Et sic in infinitum. Quoniam enim proportio CA, ad AD, componitur ex proportione CA, ad EF, & huius ad DA: ex genesi autem parabolarum, est vt CA, ad EF, sic potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad similem potestatem BF: & vt EF, ad DA, sic BF, ad BA. Ergo ratio CA, ad AD, componetur ex rationibus potestatis AB, eiusdem gradus cum trilineo ad similem potestatem BF, & ex ratione BF, ad BA. Sed ex istis duabus rationibus componitur ratio potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei, ad similem potestatem BF. Ergo patet propositum.

PROPOSITIO VI.

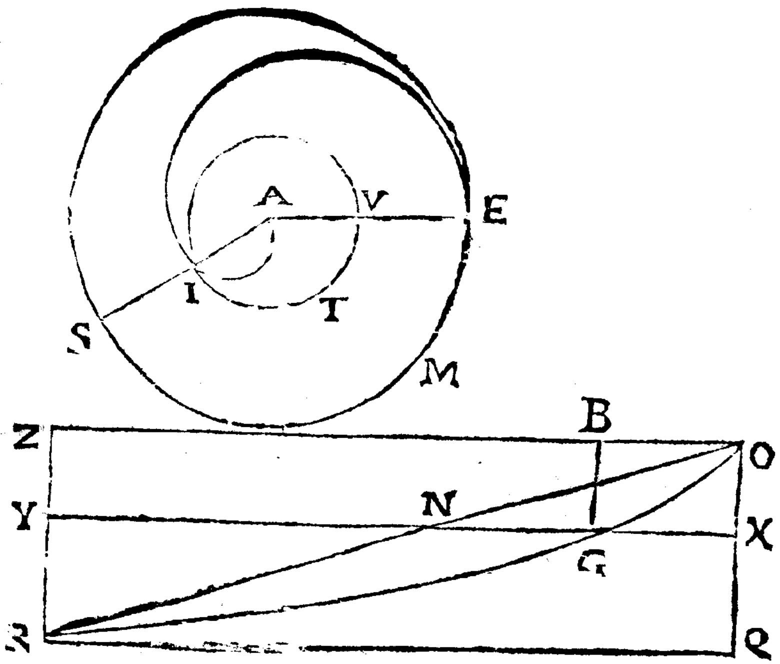
Excessus primi circuli supra quodlibet spirale spatium ex prima reuolutione, est æqualis trilineo parabolico vno gradu altiori spatio spirali, cuius diameter sit æqualis semidiametro circuli, basis verò circumferentiæ.

SIt quæcunque spiralis ex prima reuolutione AIE, AE, verò sit linea reuolutionis initium, sitque etiam semidiameter circuli primi; pariter esto parallelogrammum rectangulum ZQ, circumscriptum semiparabolæ ZOR, cuius basis ZR, vertex O, quæ sit gradus vnitate altioris gradu spiralis: v.g. si spiralis sit linearis, parabola sit quadratica: si spiralis sit quadratica, parabola sit cubica: &c. insuper ZR, seu OQ, sit æqualis semidiametro EA, ZO, verò, seu RQ, sit æqualis circumferentiæ EMSE. Dico excessum circuli supra spatium spirale (qui deinceps breuitatis gratia vocabitur excessus absolutè) æqualem esse RGOQ, trilineo. Accipiatur in AE, arbitrariè punctum V, & centro A, interuallo AV, describatur circulus secans spiralem in I, & ducatur AIS: deinde fiat OX, æqualis AV, seu AI, & ducatur XGY, parallela RQ, & per G, ipsa GB, parallela RZ. Quoniam enim ex natura parabolæ explicata initio lib. pri. de infin. parab. est vt potestas RZ, seu OQ, congruens parabolæ ad similem potestatem BG, seu OX, sic

ZO, seù RQ, ad BO, seù GX: & cum vt talis potestas QO, ad similem potestatem OX, sic in spirali similis potestas EA, ad similem potestatem AV (quia QO, OX, sunt æquales ipsis EA, AV.) Ergo vt RQ, ad GX, sic potestas EA, congruens parabolæ, nempe vno gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV, seù AI. Sed ex proposit. 3. vt talis potestas EA, ad potestatem AI, sic circumferentia EMSE, ad circumferentiam VTI. Ergo & vt RQ, seù YX, ad GX, sic circumferentia EMSE, ad circumferentiam VTI. Ergo & permutando, vt XY, ad EMSE, sic GX, ad VTI. Sed ex constructione, YX, seù RQ, est æqualis circumferentiæ EMSE. Ergo etiam GX, erit æqualis VTI. Cum ergo puncta V, X, sumpta fuerint arbitrariè, ergo omnes lineæ trilinei RGOQ, parallelæ RQ, erunt æquales omnibus circumferentijs excessus circuli EMSE, supra spirale spatium; quæ circumferentiæ sunt concentricæ ipsi EMSE. Ergo & trilineum erit æquale prædicto excessui. Quod &c.

SCHOLIVM.

Notetur autem, quod supradicta propositio non solum verificatur secundum totas magnitudines, sed etiam secundum ipsarum partes proportionales. Nimirum, non modò totus excessus circuli erit æqualis toto trilineo RGOQ, sed etiam si AV, OX, sint



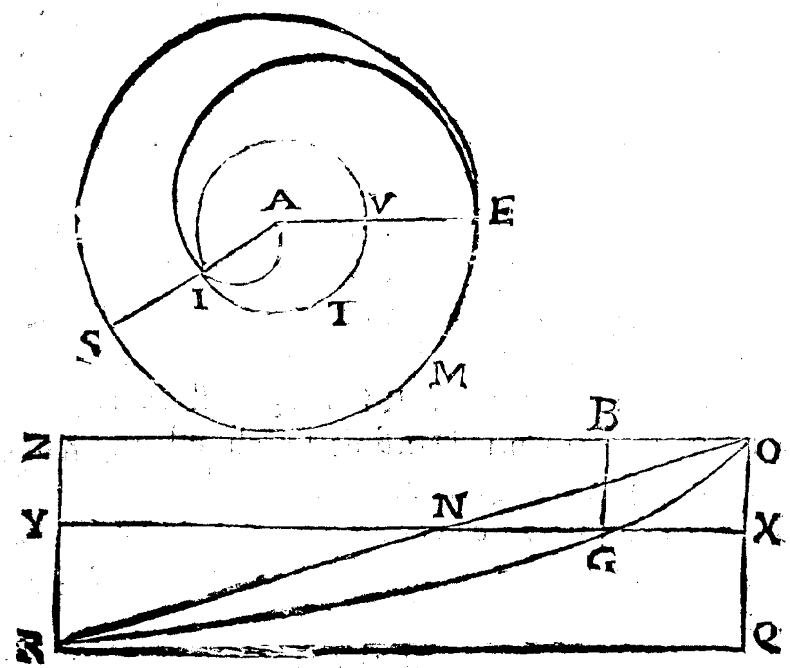
sint æquales, pars excessus clausa circumferentia EMSE, spirali EI, circumferentia ITV, & recta EV, erit æqualis trapezio parabolico RGXQ. Idem intelligatur de alijs partibus, dummodo semper AE, QO, æqualiter secentur.

Ex hac doctrina, & ex schol. 1. proposit. 3. lib. 1. de Infinit. Parab. deducemus, quod si centro A, intervallo AV, describatur quælibet circumferentia VTI: erit totus excessus ad partem sui clausam curuis AI, ITV, & recta AV, vt potestas EA, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV. V.g. in lineari, vt cubus EA, ad cubum AV. In quadratica, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum, &c. Ratio est, quia ex citat. schol. trilineum RGOQ, est ad trilineum ad verticem GOX, in prædictis rationibus. Quæ doctrina diligenter notetur, ex ipsa enim non pauca faciliter in posterum deducemus.

PROPOSITIO VII.

Si intra circulum circumscriptum primo spatio helico ducatur circulus concentricus. Erit armilla, excessus primi circuli supra ductum, ad partem excessus quam comprehendit, vt tot medietates amborum radiorum circulorum, quotus est numerus gradus spiralis binario auctus, ad tot numero terminos proportionis, continuata ratione radij maioris ad minorem, quorum primus sit radius maior.

IN eodem schemat. centro A, radio AV, sit quilibet circulus concentricus ipsi EMSE, & ipso minor, secans excessum, & spatium, vt in schemate. Dico armillam circularem cuius latitudo VE, quæ est differentia circulorum, esse ad partem excessus, quam continet, nempe illam, quam claudunt peripheria EMSE, spirali EI, circumferentia VTI, & recta VE, vt tot medietates ipsarum EA, AV, quotus est numerus gradus spiralis binario auctus, ad EA, AV, cum tot continuè proportionalibus proportionis EA, AV, continuatæ, quotus est



est idem numerus gradus spiralis binario auctus. V.g. in spirali lineari, vt 3. medietates ipsarum EA, AV, seù vt EA, AV, sesquialteræ, ad EA, AV, cum tertia proportionali. In quadratica, vt 4. medietates EA, AV, seù vt ipsarum duplæ, ad EA, AV, cum duobus alijs terminis continuè proportionalibus. Et sic in infinitum.

Trilineum parabolicum anteced. proposit. sit sectum cum triangulo sibi circumscripto linea NGX, RQ, parallela, vt QX, æquetur EV. Patet faciliter ex proposit. anteced. & ex eius schol. sicuti totum triangulum ROQ, est æquale toti circulo radij AE, & totum trilineum RGOQ, est æquale toti excessui, sic trapezium RNXQ, esse æquale armillæ latitudinis VE; & trapezium RGXQ, esse æquale excessui ab armilla comprehenso. Ergo armilla ad excessum, & trapezium triangulare ad trapezium trilineare, habebunt eandem rationem. Tunc, ratio trapezij RNXQ, ad trapezium RGXQ, (de foris sumpto parallelogrammo YQ) componitur ex ratione illius ad parallelogrammum, & huius ad trapezium RGXQ. Ast ex 2. parte proposit. 9. lib. pri. de Infinit. Parab. est trapezium RNXQ, ad YQ, vt XO, OQ, ad duplam OQ: & vt OX, OQ, seu vt duæ medietates OX, OQ, ad duplam QO, sic tot medietates OX, OQ, quotus est numerus gradus spiralis binario auctus, ad tot numero QO. Ergo RNYQ, erit ad YQ, vt illæ tot medietates ad tot QO. Sed YQ, est ad RGXQ, ex loc. citat. vt tot QO, quotus est numerus trilinei vnitate auctus (nempe quotus est numerus spiralis binario auctus) ad QO, OX, cum alijs terminis proportionis QO, ad OX, continuatæ ad tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum trilinei vnitate (nempe spiralis binario.) Ergo ratio trapezij triangularis, ad AGXQ, componetur ex ijsdem rationibus. Sed ex ipsis componitur etiam ratio tot medietatum QO, OX, quotus est numerus spiralis binario auctus, ad QO, OX, cum illis tot numero terminis. Ergo etiam trape-

trapezium ad trapezium, & consequenter armilla latitudinis VE, erit ad partem excessus dictam, quam comprehendit, vt illæ tot medietates ad illas proportionales. Nempe, vt tot medietates ipsarum EA, AV, quotus est numerus spiralis binario auctus, ad EA, AV, vna cum tot alijs proportionalibus, quæ simul adæquent eundem numerum spiralis binariò auctum.

COROLLARIVM.

Ergo per conuersionem rationis, erit armilla radij VE, ad partem spatij helici quam claudit, nempe ad illam, quæ clauditur recta VE, & curuis IE, IV, vt illæ medietates ad excessum ipsarum supra illas proportionales. Nempe in lineari vt sesquialtera EA, AV, ad excessum vnius medietatis EA, AV, supra tertiam minorem proportionalem. In quadratica, vt excessus EA, AV, supra tertiam, & quartam minores proportiones, &c.

PROPOSITIO VIII.

Circulus ductus concentricus, erit ad partem excessus, quam continet, vt potestas radij circuli maioris eiusdem gradus cum spirali, ad talem partem similis potestatis radij ducti, quæ se habeat ad totam, vt binarium ad numerum spiralis binariò auctum.

IN Eodem schemate. Dico circulum radij AV, esse ad AITVA, partem excessus quam claudit, vt potestas EA, eiusdem gradus cum spirali, ad partem similis potestatis AV, quæ se habeat ad totam potestatem AV, vt binarium ad numerum spiralis binario auctum. Nempe in lineari, vt EA, ad $\frac{2}{3}$ AV. In quadratica, vt quadratum EA, ad $\frac{2}{4}$ quadrati AV. In cubica, vt cubus EA, ad $\frac{2}{5}$ cubi AV. Et sic discurrendo.

Triangulum enim NOX, est æquale circulo radij, AV, & trilineum GOX, æquale excessui AITV; ergo triangulum ad trilineum, & circulus ad excessum erunt in eadem ratione. Sed intellecta recta GO, triangulum NOX, est ad triangulum GOX, vt NX, ad GX (nempe vt tota circumferentia VTIV, ad circumferentiam VTI (NX, enim, & GX, sunt æquales illis circumferentijs:) & triangulum GOX, est ad trilineum GOX, ex schol. pri. proposit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. vt numerus trilinei vnitate auctus (nempe vt numerus spiralis binario auctus) ad binarium, nempe, vt GX, ad talem sui partem; seu vt circumferentia ITV, ad talem sui partem. Ergo ex æquali, erit NOX, ad trilineum, & consequenter circulus radij EA, ad partem excessus AITV, vt tota circumferentia radij AV, ad talem partem VTI, quæ se habeat ad ipsam, vt binarium ad numerum binario auctum. Sed vt circumferentia radij AV, ad dictam partem circumferentiæ VTI, sic circumferentia radij EA, ad similem partem circumferentiæ EMS: & cum sit vt circumferentia radij AE, ad EMS, sic potestas EA, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AI, seu AV; vnde est etiam vt circumferentia radij AE, ad talem partem EMS, quæ se habeat ad ipsam, vt binarium ad numerum binario auctum, sic potestas EA, eiusdem gradus cum spirali ad talem partem similis potestatis AV, quæ se habeat ad ipsam, vt binarium ad numerum spiralis binario auctum. Ergo à primo ad vltimum, erit circulus radij AV, ad excessum AITV, vt dicta potestas EA, ad dictam partem similis potestatis AV. Quod erat ostendum.

COROLLARIVM.

Per conuersionem ergo rationis erit circulus radij AV, ad partem spatij, quam claudit, nempe ad AIVA, vt dicta potestas EA, ad excessum ipsius supra dictas partes potestatis similis AV.

SCHOLIVM.

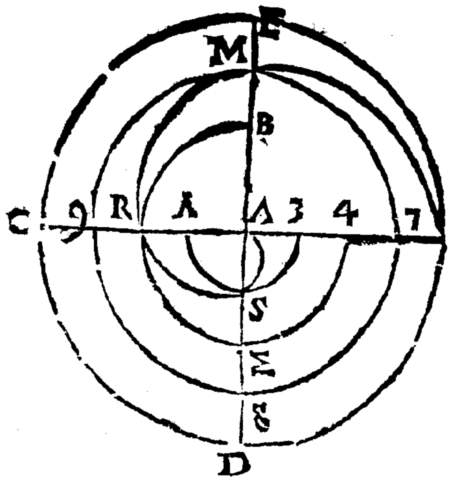
Vt imitaremur Caualerium in lib. 6. Geom. Indi. ostendimus 6. propositionem per indiuisibilia: verum ipsum omnimodè insequentes, illam ostendemus modo Archimedeo, & ipsam demonstrabimus vniuersalius: non modò quia agemus de infinitis spiralibus, cum ipse de vnica egerit dumtaxat, sed etiam quia

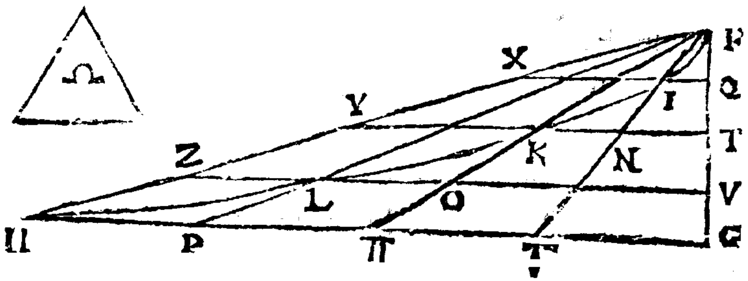
quia vniuersaliter considerabimus trilinea, & non prædictis excessibus æqualia tantum, vt fecit Caualerius. Modus iste ostendendi Archimedeus nonmodò potest seruari in ista propositione, sed etiam in omnibus alijs sequentibus, in quibus particulariter in spirali lineari ipso vtitur Caualerius; & quidem semper duplici de causa vniuersalius. Verum nos ipsum non adhibebimus nisi in præsenti propositione. In alijs etenim vtemur regali, & facili indiuisibilium via, relinquentes illam archimedeam ijs, qui in rebus geometricis cupiunt excruciari. Verum tamen est, quod si quis optabit ostendere illas propositiones Archimedeè, id ei licebit perficere, attentè considerata sequenti propositione, & ad ipsius instar, sed congruenti modo, operando, & discurrendo.

PROPOSITIO IX.

Circulus ad excessum sui supra quodlibet spatium spirale ex prima reuolutione eam habet proportionem, quam habet triangulum circumscriptum trilineo vno gradu altiori spirali, ad ipsum.

Sit quæcunque spiralis ex prima reuolutione ASRMB, cum sibi circumscripto circulo BDCE, & sit quodlibet triangulum rectangulum cum sibi inscripto trilineo FGH, vno gradu altiori gradu spiralis, vt dictum fuit supra. Dico circulum dictum, esse ad excessum ipsius supra spatium spirale





spirale ASRMBA, vt triangulum FGH, ad trilineum FGH, sibi inscriptum.

Si triangulum non est ad trilineum in eadem ratione cum circulo ad illum excessum, vel est in maiori, vel in minori. Sit primò in minori. Ergo triangulum ad aliquid minus illo trilineo erit in eadem ratione. Sit Ω, excessus quo trilineum superat magnitudinem, ad quam triangulum est in eadem ratione cum circulo ad illum excessum. HG, basis

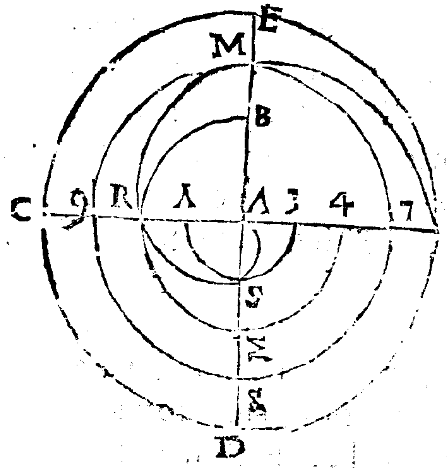
D triangu-

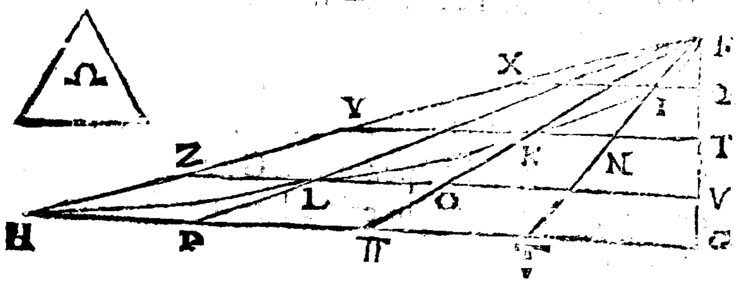
trianguli diuidatur bifariam in π, & partes rurſum bifariam in P, r, & hoc ſemper fiat, donec à vertice F, ductis Fr, Fπ, FP, tandem deueniatur ad triangulum FrG, quod ſit minus ſpatio Ω; & per puncta I, k, L, vbi ductæ à vertice F, ſecant curuam parabolicam, ducantur parallelæ ipſi HG, vt in ſchemate. Habemus ergo trilineo circumſcriptam figuram conſtantem ex triangulo FIQ, & ex trapezijs kQ, LT, HV; & alteram inſcriptam conſtantem ex trapezijs NQ, OT, PV; & exceſſus circumſcriptæ ſupra inſcriptam minor eſt ſpatio Ω: quia exceſſus prædictus (vt conſideranti patet) æquatur triangulo FrG, quod ex conſtructione, eſt æquale Ω. Ergo trilineum ſuperabit figuram ſibi inſcriptam multo minori quantitate quam ſit Ω. Ergo triangulum HFG, ad talem figuram in trilineo inſcriptam adhuc erit in minori ratione quam circulus ad exceſſum ſupra ſpatium ſpirale. Quod ſeruetur.

Tunc AB, diuidatur ſimiliter in 3, 4, 7, ſicuti diuiſa eſt FG, in Q, T, V: & centro A, interuallis A3, A4, A7, deſcribantur circumferentiæ 3S, 4R, 789M, ſecantes ſpiralem in S, R, M, per quæ tranſeant ASD, ARC, AME, productæ ad circumferentiam vſque.

Quoniam ergo circumferentia BDCEB, ad circumferentiam 789M, eſt ex propoſit. 3. vt poteſtas BA, vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem A7; & AB, GF, ſectæ ſunt pro-

por-





portionaliter in 7, V; vndè eſt vt poteſtas BA, vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem A7, ſic ſimilis poteſtas GF, ad ſimilem poteſtatem FV; ergo & circumferentia BDCEB, erit ad circumferentia 789M, vt poteſtas GF, vno gradu altior poteſtate ſpiralis (nempe eiuſdem gradus cum trilineo, quod ſupponitur vno gradu altius ſpirali) ad ſimilem poteſtatem FV. Sed ex natura trilinei, eſt vt prædicta poteſtas GF, ad poteſtatem FV,

D 2 ſic

sic HG, ad LV. Ergo & vt HG, ad LV, sic circumferentia BDCEB, ad circumferentiam 789M. Eodem modo probabimus, circumferentiam BDCEB, esse ad circumferentias 4ΣR, 3S, vt HG, ad KΓ, LQ; idemque probabimus de alijs circumferentijs inscriptis in excessu, si adessent. Cum ergo 34, sit proportionalis ipsi QT; circumferentia 3S, ipsi IQ; & circumferentia 4Σ, ipsi NT: Ergo fascia circularis 3SΣ4, erit proportionalis trapezio NQ, ex luculenter explicatis in proposit. 7. lib. 2. de infinit. parab. & in scholijs eiusdem; vnde erit circulus totus ad fasciam prædictam, vt triangulum HFG, ad trapezium IT. Eodem modo probabitur esse circumferentiam ad fasciam 4ΣR987, vt HFG, triangulum ad trapezium kV; & circulum ad fasciam 789MECDB, vt triangulum ad trapezium LG; & sic probaretur de alijs. Ergo circulus erit ad omnes fascias inscriptas intra illum excessum, vt triangulum ad omnia trapezia inscripta intra trilineum. Sed triangulum probatum est supra, esse ad omnia trapezia inscripta in trilineo, in minori ratione, quam circulus ad excessum illum. Ergo circulus ad omnes fascias inscriptas intra excessum, erit in minori ratione, quam ad excessum ipsum. Quod implicat. Quare &c.

Sed nec etiam erit triangulum in maiori ratione ad trilineum, quam circulus ad excessum. Nam sic, triangulum ad aliquid maius trilineo erit in eadem ratione cum circulo ad excessum. Sit excessus rursum Ω, vt

Ω, vt triangulum sit ad trilineum cum Ω, in eadem ratione cum circulo ad excessum. Diuidatur iterum HG, bifariam, & partes iterum bifariam, & constituantur triangula, vt factum est prius, vt vnum triangulorum v. g. FΓG, minus sit spatio Ω. Ergo triangulum ad trilineum simul cum triangulo FΓG, erit adhuc in maiori ratione quam circulus ad excessum. Si ergo factis circumscriptione, & inscriptione vt in schemate: patebit triangulum IFQ, cum trapezijs kI, Lk, HL, quæ sunt æqualia excessui figuræ circumscriptæ supra trapezia NQ, QT, PV, inscripta, æqualia esse triangulo FΓG. Ergo figura circumscripta superabit inscriptam spatio minori Ω. Ergo figura circumscripta superabit trilineum multò minori quantitate. Ergo triangulum ad figuram circumscriptam erit in multo maiori ratione, quam circulus ad excessum. Sed eodem modo, quo factum fuit supra, probabimus, circulum ad sectorem SA3, esse vt triangulum ad triangulum IFQ: & circulum ad fasciam 34ΣR^S3, vt triangulum HFG, ad trapezium kQ: & sic de alijs fascijs, & trapezijs circumscriptis excessui prædicto, & ipsi trilineo. Ergo circulus ad totam figuram excessui circumscriptam, erit vt triangulum ad figuram circumscriptam trilineo. Ergo circulus erit in maiori ratione ad figuram circumscriptam excessui, quam ad ipsum excessum. Quod iterum implicat. Ergo &c. Quod &c.

CO-

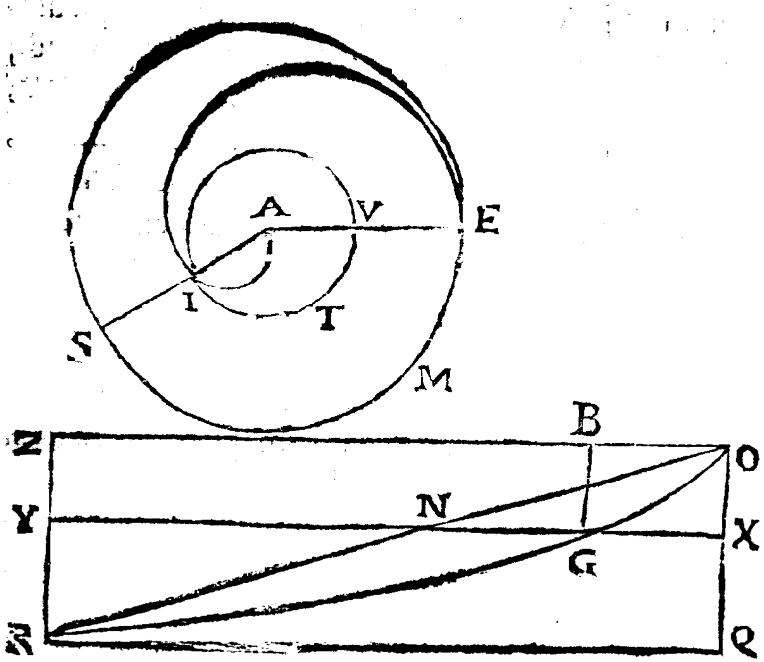
COROLLARIVM

Ergo per conuersionem rationis, erit circulus ad ipsum spatium spirale, vt triangulum ad excessum ipsius supra trilineum. Cum ergo ostensum sit in schol. 1. proposit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. esse triangulum HFG, ad excessum ipsius supra trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum: erit & circulus ad spatium spirale, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad ipsum vnitate minutum: nempe vt numerus spiralis binario auctus ad ipsum numerum spiralis (numerus enim trilinei superat semper numerum spiralis vnitate.) Erit ergo circulus ad primum spatium spirale, vt 3. ad 1. Ad sec. vt 4. ad 2. Ad tertium, vt 5. ad 3. Et sic in infinitum, auctis semper antecedente, & consequente vnitate.

PROPOSITIO X.

Si in spiralem quamcunque ex prima reuolutione ortam ducatur linea, & centro initio, interuallo illa linea describatur circulus. Erit primus circulus spirali circumscriptus, ad sectorem circuli descripti contentum ducta linea, & portione abscissa à linea, quæ est initium reuolutionis in præcedentia, vt potestas semidiametri primi circuli duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem radij alterius circuli.

Esto



Esto quælibet spiralis ex prima reuolutione orta AIE, in qua ducta vbilibet ab initio A, linea AI, centro A, interuallo AI, sit descriptus circulus VITV. Dico circulum radij AE, esse ad sectorem AVTIA, vt potestas EA, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AI, seu AV. Nempe in lineari, vt cubus ad cubum. In quadratica, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum &c.

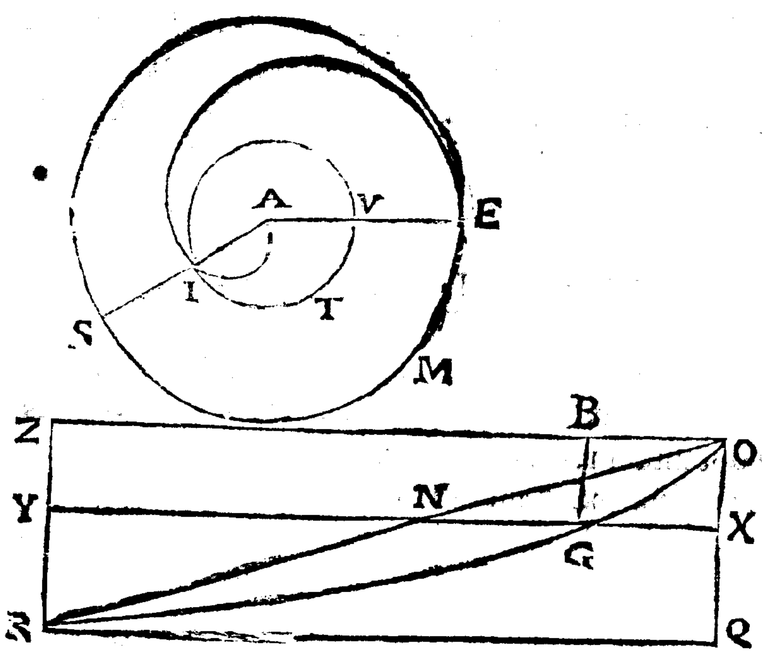
Nam circulus radij AE, ad sectorem AVTIA, habet rationem compositam ex ratione ipsius ad circulum

culum radij AV, & huius ad sectorem. Sed vt circulus radij AE, ad circulum radij AV, sic quadratum AE, ad quadratum AV: & vt circulus radij AV, ad sectorem AVTIA, sic peripheria VTIV, ad peripheriam VTI; nempe sic peripheria EMSE, ad peripheriam EMS: & vt peripheria EMSE, ad EMS, sic potestas EA, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AI, seù AV, ex proposit. 2. Ergo circulus radij AE, ad sectorem AVTIA, habebit rationem compositam ex ratione AE, ad quadrati quadratum AV, & ex ratione potestatis AE, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AV. Sed ex his duabus rationibus componitur ratio potestatis AE, duplici gradu altioris potestate spiralis, ad similem potestatem AV. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

Cum in schol. proposit. 6. probatum sit, esse excessum circuli radij AE, supra spatium spirale ad sui partem contentam recta AV, & curua AI, ITV, vt potestas pariter EA, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AV. Erit etiam prædictus excessus ad talem sui partem, vt circulus radij AE, ad sectorem AVTIA. Ex qua analogia, seù similitudine proportionum licebit varia veluti corollaria deducere.

CO-



COROLLARIVM I.

Deducemus enim primo, quod intellecto trilineo parabolico RGOQ, vno gradu altiore gradu spiralis, cum sibi circumscripto triangulo ROQ; erit triangulum ad trilineum, vt sector AVTIA, ad excessum ipsius supra portionem spatij spiralis comprehensam recta, & curua AI. Quod patet, quia cum sit totus circulus radij AE, ad sectorem AVTIA, vt excessus circuli radij AE, supra spatium spirale

E ad

ad partem ipsius comprehensam recta AV, & curuis VTI, IA: erit etiam permutando, circulus radij AE, ad excessum, vt AVTIA, ad illam partem excessus, quam comprehendit. Sed ex propos. 9. est circulus ad excessum, vt triangulum ROQ, ad trilineum. Ergo etiam sector ad illum excessum erit, vt triangulum ad trilineum.

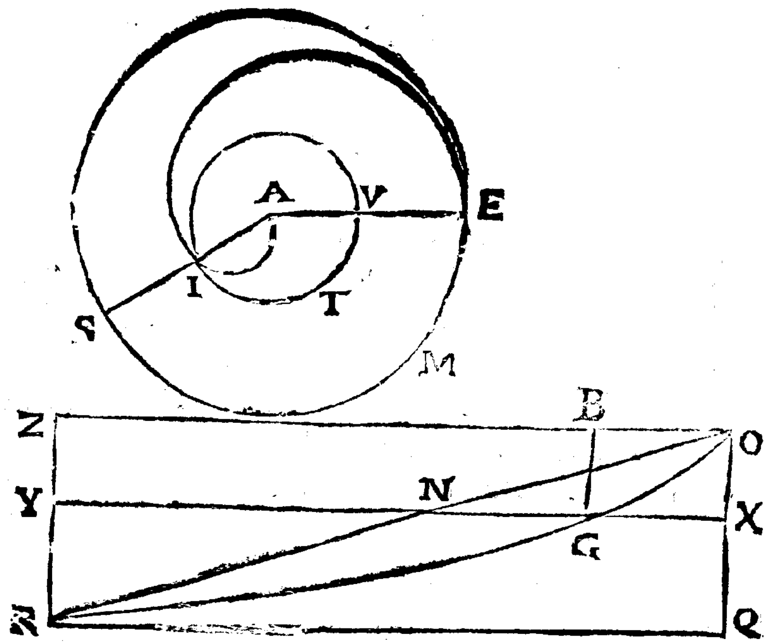
COROLLARIVM II.

Deducemus 2. esse etiam per conuersionem rationis, sectorem AVTIA, ad partem spatij spiralis contentam recta, & curua AI, vt triangulum ad excessum ipsius supra trilineum. Nempe iuxta explicata in schol. eiusdem proposit. vt numerus spiralis binario auctus, ad numerum spiralis.

COROLLARIVM III.

Deducemus 3. etiam armillam circularem cuius latitudo SI, vel VE, vna cum sectore AVIA, esse ad spatium comprehensum rectis AI, AE, & curua EI, vt numerus binario auctus, ad numerum. Cum enim probatum sit, esse vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, nempe vt totus circulus ad totum spatium, sic ablatum sectorem AVTIA, ad ablatum spatium: erit & reliquum ad reliquum vt totum ad totum.

CO-



COROLLARIVM IV.

Deducemus 4. esse totum spatium spirale ad portionem sui contentam recta, & curua AI, vt potestas AE, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem AI, seu AV. Cum enim probatum sit, sic esse totum circulum ad totum spatium, vt sector AVTIV, ad partem clausa n recta, & curua AI. Erit etiam permutando, vt totus circulus ad sectorem, nempe ex præsenti proposit. vt po-

E 2 testas

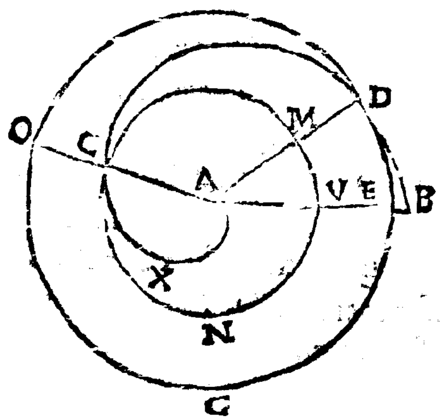
testis A E, duplici gradu altior potestate spiralis, ad similem potestatem A I, seù A V, sic totum spatium spirale, ad sui partem clausam recta, & curua A I.

COROLLARIVM V.

Non diuerso modo quo factum est in coroll. 3. deducemus 5. in schem. proposit. sequen. ductis ab A, initio spiralis AXCDB, duabus lineis AC, AD, intercipientibus spatium intermedium spirale CAD, ac semidiametris AC, AD, descriptis circulis, esse sectorem OAD, simul cum fascia COGEV, ad spatium CAD, vt numerus binario auctus ad numerum. Ex dictis enim, est in dicta ratione tam totus sector ADOGEA, ad totum spatium ADCXA, quam ablatus sector ACNVA, ad ablatum spatium ACX. Ergo & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum: nempe in dicta ratione.

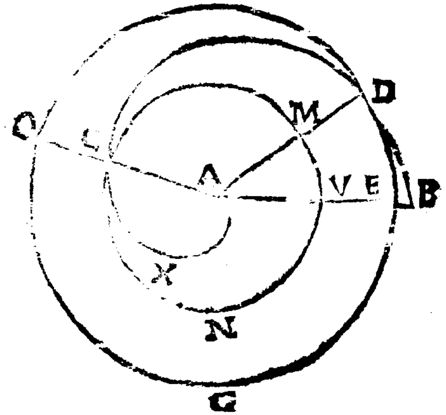
PROPOSITIO XI.

Si ab initio cuiuscunque spiralis ducantur duæ lineæ terminatæ ad duo puncta intermedia spiralis, & centro initio, interuallo maiori ductarum describatur circulus. Sector circumscriptus spatio spirali à duabus ductis clauso, erit ad ipsum, vt factum sub quadrato maioris ductæ in differentiam potestatum ductarum eiusdem gradus cum spirali, ad sui tales partes, & facti sub differentia quadratorum duarum in potestatem minoris eiusdem gradus cum spirali, quæ se habeant ad hæc facta vt numerus spiralis ad numerum auctum binario.



Esto quælibet spiralis AXCDB, & ab initio A, sint ductæ AC, AD, & centro A, interuallo AD, maiori sit descriptus circulus, &c. Dico sectorem OAD, esse ad segmentum spirale CAD, vt factum sub quadrato OA, in differentiam potestatem OA, AC, eiusdem gradus cum spirali, ad sui tales partes, & facti sub differentia quadratorum OA, AC, in potestatem AC, eiusdem gradus cum spirali simul, quæ se habeant ad hæc facta, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. V. g. in lineari, vt factum sub quadrato OA, in OC, ad ⅓ ipsius, & facti sub differentia quadratorum OA, AC, in AC. In quadratica: vt factum sub quadrato OA, in differentiam quadratorum OA, AC, ad $\frac{2}{4}$, huius, & facti sub eadem differentia in quadratum CA. In cubica, vt factum sub quadrato OA, in differentiam cuborum OA, AC, ad $\frac{3}{5}$ huius facti, & facti sub differentia quadratorum OA, CA, in cubum CA. Et sic in infinitum. Centro etiam A, interuallo AC, describatur alius circulus. Quoniam sector OAD, est ad sectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA: ergo per conuersionem rationis, erit ad fasciam MDOC, vt quadratum OA, ad differentiam quadratorum, OA, AC. Quoniam verò ex coroll. proposit. prim. est circumferentia DO, ad circumferentiam OGE (nempe fascia circularis MDOC, ad fasciam CO GEV,) vt differentia potestatum AD, seù OA, & AC, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem AC: & sector OAD, ad fasciam CO GEV, habet rationem compositam ex ratione ipsius ad fasciam MDOC, & huius ad fasciam CO GEV. Ergo sector ad fasciam COGEV, erit in ratione composita ex ratione quadrati OA, ad differentiam quadratorum OA, AC, & ex ratione differentiæ potestatum OA, AC, eiusdem gradus cum spirali, ad similem potestatem CA. Ergo sector erit ad talem fasciam, vt factum sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub differentia quadratorum OA, CA, in potestatem CA, eiusdem gradus cum spirali. Et conuertendo, & componendo, erit fa-

scia



scia cum sectore ad eundem sectorem, vt factum sub differentia quadratorum OA, CA, in potestatem CA, eiusdem gradus cum spirali, cum facto sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, ad hoc secundò factum. Et rursum conuertendo, erit sector ad fasciam cum sectore, vt secundo factum ad ambo facta. Sed ex coroll. 5. proposit. anteced. sector DAO, cum fascia COGEV, est ad spatium spirale CAD, vt numerus spiralis binario auctus ad numerum spiralis; nempe vt ambo illa facta ad tales partes ipsorum, quæ sint ad ipsa facta, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Ergo ex æquali, sector OAD, erit ad spatium spirale CAD, vt factum sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, ad tales partes ipsius, & facti sub differentia quadratorum OA, CA, & sub

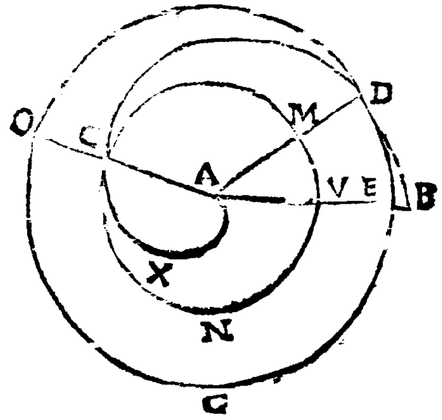
pote-

potestate CA, eiusdem cum spirali gradus, quæ se habeant ad hæc facta, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Notandum tamen est, quod quamuis supradicta propositio proposita sit de segmento intermedio CAD, & de sectore EI, circumscripto, hoc tamen non est ita intelligendum, quasi non verificetur etiam in segmento DAB, & in sectore EI circumscripto. Simili enim discursu obteniretur intentum.

Sed in prima, & secunda spirali faciliorem rationem sectoris ad spatium possumus, ex dictis, assignare. In prima enim spirali, erit sector ad spatium, vt quadratum AD, seù OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC. In secunda autem, erit vt idem quadratum OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{2}{4}$ seù cum dimidio quadrati OC. Primum patet: quia cum ex regula generali deducatur, sectorem esse ad spatium, vt factum sub OC, in quadratum OA, ad $\frac{1}{3}$ huius, & facti sub differentia quadratorum OA, AC, in AC; nempe facti sub OC, in compositam ex OC, & dupla CA, & sub CA: & cum in omnibus prædictis solidis sit vnum commune latus, nempe OC: sequitur sectorem esse ad spatium, vt quadratum OA, ad $\frac{1}{3}$ ipsius, & rectanguli sub CA, & sub composita ex OC, & dupla CA.

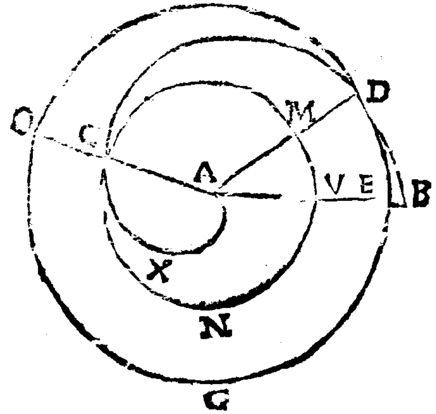


CA. Cum vero hoc rectangulum sub CA, & sub composita ex OC, & dupla CA, sit æquale duplo quadrato CA, & rectangulo OCA. Sequitur sectorem esse ad spatium, vt quadratum OA, ad $\frac{1}{3}$ eiusdem, simul cum $\frac{1}{3}$ duorum quadratorum CA, & rectanguli OCA. Sed $\frac{1}{3}$ horum planorum est rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC. Quia quadratum OA, diuiditur in quadrata OC, CA, & in duo rectangula OCA. Colligendo ergo omnia hæc plana, habebimus tria quadrata CA; tria rectangula OCA; & quadratum OC. Quorum $\frac{1}{3}$ est vnum rectangulum OCA, cum vno quadrato CA (nempe rectangulum OAC) cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC. Quare patet primum.

Ferè eodem modo patebit secundum. Quia cum sector sit ad spatium, vt factum sub OC, in compositam ex OC, & dupla CA (hoc enim rectangulum est differentia quadratorum OA, AC) & sub quadrato OA, ad dimidium huius facti, & facti sub eodem rectangulo in quadratum CA: & cum hæc omnia facta habeant commune planum rectangulum sub OC, in compositam ex OC, & dupla CA: sequitur sectorem esse ad spatium, vt quadratum OA, ad dimidium quadratorum OA, AC. Sed dimidium horum quadratorum est rectangulum OAC, cum dimidio quadrati OC, vt consideranti patebit. Quare secundum est manifestum.

SCHOLIVM II.

Ex dictis ergo in superiori scholio, patet in prima, & secunda spirali, sectorem ad spatium seruare hunc ordinem, vt sit vt quadratum maioris ductæ, ad rectangulum sub ductis, vna cum tali parte quadrati differentiæ ductarum, quæ sit ad ipsum, vt numerus spiralis ad numerum binariò auctum; nempe ad $\frac{1}{3}$, & ad dimidium, nempe ad $\frac{2}{4}$. Forsitan ergo quis posset cogitare talem proportionem sectoris ad spatium seruare hunc pulcherrimum ordinem, vt in tertia sit, vt quadratum OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{3}{5}$ quadrati OC. In quarta cum $\frac{4}{5}$ quadrati OC. Et sic in infinitum. Sed qui sic putaret nimis à scopo aberraret, sicuti patebit in numeris experienti in tertia spirali. Supponamus enim facilitatis gratia, OA, esse duplam AC. Quoniam cubus OA, esset 8, & cubus CA, 1: ergo differentia cuborum OA,



OA, AC, esset 7. Cum ergo quadratum OA, sit 4. Ergo factum sub quadrato OA, & sub differentia cuborum OA, AC, esset 28. Pariter factum sub differentia quadratorum OA, AC, nempe sub 3. & sub cubo CA, nempe sub 1, esset 3. Ergo sector esset ad spatium vt 28. ad tria quinta 31. nempe ad 18. $\frac{3}{5}$ nempe, vt 4. ad 2. & $\frac{23}{35}$. Cum tamen quadratum OA, sit ad rectangulum OAC, cum $\frac{3}{5}$ quadrati OC, vt 4. ad 2. cum $\frac{3}{5}$ nempe cum $\frac{21}{35}$. Quare &c.

Sed proportio sectoris ad spatium prædictum potest alio modo, & compendiosius, patefieri. Quapropter sit.

PROPOSITIO XII.

Idem sector ad idem segmentum, erit vt idem antecedens *ad tales partes differentiæ poteſtatum ductarum duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſupra ſimilem poteſtatem minoris, quæ ſe habeant ad totam dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum ſpiralis binario auctum.*

EOdem enim modo, quo ſupra factum fuit, oſtendemus, circumferentiam DO, eſſe ad circumferentiam DOGE, vt differentia poteſtatum DA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem DA, ſeù OA. Cum autem ſit, vt circumferentia DO, ad circumferentiam DOE, ſic ſector ADO, ad ſectorem ADOEA; & pariter cum ſit, vt prædicta differentia ad prædictam poteſtatem OA, ſic factum ex dicta differentia in quadratum OA, ad poteſtatem OA, duplici gradu altiorem poteſtate ſpiralis. Ergo ſector DAO, erit ad ſectorem ADOEA, vt factum ſub dicta differentia poteſtatum OA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum OA, ad poteſtatem OA, duplici gradu altiorem poteſtate ſpiralis. At ſector ADOEA, eſt ad ſpatium ſpirale AXCDA, vt numerus ſpiralis binario auctus, ad numerum, ex coroll. 2. propoſit. 10. nempe vt poteſtas OA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad tales partes ſui, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo ex æquali, ſector DAO, erit ad AXCDA, vt factum ſub prædicta differentia in quadratum OA, ad dictas partes poteſtatis OA.

Rur-

Rurſum, cum ſpatium ſpirale AXCDA, ſit ad ſpatium AXCA, vt poteſtas DA, ſeù OA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem CA, ex coroll. 4. propoſit. 10. nempe vt tales partes talis poteſtatis OA, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad ſimiles partes poteſtatis CA: erit per conuerſionem rationis, AXCDA, ad ACD, vt tales partes poteſtatis OA, ad exceſſum ipſarum ſupra ſimiles partes poteſtatis CA. Quare rurſum ex æquali, erit ſector DAO, ad ſegmentum CAD, vt factum ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum OA, ad tales partes differentiæ poteſtatum OA, AC, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad totam differentiam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Quod &c.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſit. & ex anteced. quamuis extra intentum, colligemus, differentiam poteſtatum OA, AC, cuiuslibet gradus, æqualem fore facto ſub quadrato OA, in differentiam poteſtatum OA, AC, dupli gradu inferiorum, & facto ſub differentia quadratorum OA, AC, in poteſtatem CA, itidem duplici gradu inferiorem. V. g. differentia quadratoquadratorum OA, AC, erit æqualis facto ſub quadrato OA, & ſub differentia quadratorum OA, AC, A C, vna cum facto sub dicta differentia quadratorum O A, A C, in quadratum A C. Quod vtique est manifestum. Nam ex prop. 11. sector OAD, est ad spatium C A D, vt factum sub quadrato O A, in differentiam potestatum O A, A C, eiusdem gradus cum spirali, ad sui talem partem, & facti sub differentia quadratorum O A, A C, & sub potestate A C, eiusdem gradus cum spirali, quæ se habeat ad hæc, vt numerus ad numerum binario auctum. Ex præsenti proposit. idem sector O A D, est ad idem spatium C A D, vt idem factum sub quadrato O A, in differentiam potestatum O A, A C, eiusdem gradus cum spirali ad talem partem differentiæ potestatum O A, A C, duplici gradu altiorum potestate spirali, quæ se habeat ad dictam differentiam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo ambo consequentia harum proportionum erunt æqualia. Cumque sint similes partes illarum magnitudinum cuius sunt partes: etiam integræ magnitudines erunt æquales. Differentia ergo potestatum OA, AC, dupli gradu altiorũ gradu spiralis, erit ęqualis facto sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, AC, eiusdem gradus cũ spirali, vna cum facto sub differẽtia quadratorum OA, AC, in potestatem CA, eiusdem gradus cũ spirali. Quod vtique illud idem est, quod supra dictum fuit.

SCHOLIVM.

Sed sicuti in schol. prim. proposit. anteced. depres-

pressi fuerunt termini proportionis dictæ primæ, & secundæ spiralis ad terminos inferiores, sic licebit ipsos in præsenti deprimere, & compendiosiores rationes assignare, vt ibidem factum fuit. An verò necesse sit in alijs spiralibus altiorum graduum retinere proportiones illarum potestatum, adeo vt nullatenus liceat ipsas deprimere, non videtur affirmandum. Sed quomodo possint deprimi, videat lector proprio Marte. Saltem enim ex doctrinis Francisci Vietæ explicatis in notibus priorlbus ad Logisticen Speciosam à proposit. 14. infra, colliget posse dictas proportiones deprimi vno gradu. Colligitur enim ex ibidem ab ipso ostensis. Consectarium suum vniuersale, quod habet post proposit. 24. Quod *Differentia potestatum si adplicetur ad differentiam laterum orientur singularia homogenea quibus constat potestas gradus proxime inferioris adgregati ipsorum laterum, semel sumpta. Et è contra.* V. g. si cubus O A, minus cubo A C, adplicetur ad O C, differentiam laterum O A, A C, orientur quadratum O A, rectangulum O A C, & quadratum A C, simul, & semel sumpta; quæ plana sunt omnia singularia plana potestatis vnius gradus inferioris, nempe quadrati, adgregati laterum O A, A C. Et sic in alijs potestatibus. Cum ergo proportio sectoris O A D, ad spatium C A D, sit eadem cum ratione facti sub quadrato O A, in differentiam potestatum O A, AC, eiusdem gradus cum spirali, ad partes explicatas differentiæ potestatum O A, A C, duplici gradu altiorum potestate spiralis: patet

ambos

ambos terminos huius proportionis posse adplicari ad OC, differentiam laterum. Sed hæc omnia melius percipientur exemplificando in tertia spirali. In hac sector OAD, est ad spatium CAD, vt factum sub quadrato OA, in differentiam cuborum OA, AC, ad $\frac{3}{5}$ differentiæ quadratocuborum OA, AC. Si adplicetur ad OC, differentiam laterum differentia cuborum OA, AC; orietur summa planorum singulariter, quibus constat quadratum adgregati laterum OA, CA, simul sumptorum; nempe quadratum OA, rectangulum OAC, & quadratum AC.

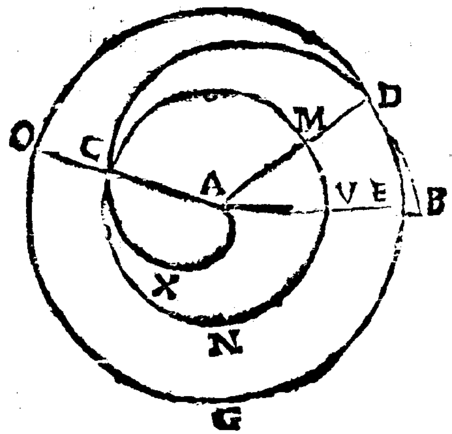
Si verò adplicetur ad eandem OC, differentia quadratocuborum OA, AC; orietur summa planoplanorum singulariter, quibus constat quadratoquadratum laterum adgregati OA, AC, simul sumptorum, nempe.

Quadratoquadratum OA. Plus cubus OA, in AC. Plus quadratum OA, in quadratum AC. Plus OA, in cubum AC. Plus quadratoquadratum AC.

Ergo in spirali cubica erit sector OAD, ad spatium spirale CAD, vt quadratoquadratum OA. Plus cubus OA, in AC. Plus quadratum OA, in quadratum CA. ad $\frac{3}{5}$ planoplanorum supra ennumeratorum.

Ex quibus videtur posse deduci aliam regulam generalem assignandi rationem sectoris OAD, in quacunque spirali, ad spatium spirale CAD. Et hæc

erit,



erit, quod sit vt factum sub quadrato OA, in omnes singulares partes potestatis adgregati OA, AC, vno gradu inferioris potestate spiralis, ad omnium singularium partium potestatis adgregati tales partes OA, AC, vno gradu superioris potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsas, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Sed hæc, & similia compendia, vt diximus, lector proprijs adinueniet viribus, si operibus Analystarum aliquando incubuerit. Quamplures etenim adinueniuntur, qui egregiè, & cum summa laude in hac materia scripsere; sed omnibus Colophonem imponet Excellentissimus Geometra Carolus Rinaldinus Serenissimi Magni Principis Etruriæ Mathematicus in quodam magno opere, quod iam exantlauit, quodque in posterum, immo quam primum, typis committet. Quamplurima etenim vir ille egregius tum philosophica, tum ma-

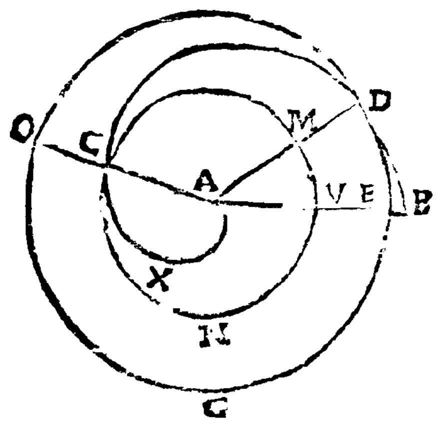
G the-

thematica molitus est: sed inter hæc extat opus algebricum absolutissimum; in quo præter omnes Analysis partes, concinnauit etiam librum non paruum, in quo in amplitudinem artis soluta fuere plus quam 300. problemata.

PROPOSITIO XIII.

Si in spatio anteced. proposit. semidiametro minori linea, inscribatur sector ACM. Erit COD, trilineum excessus sectoris maioris supra spatium, ad MDC, trilineum excessum spatij supra sectorem minorem, vt excessus facti sub differentia potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali in quadratum OA, supra tales partes differentiæ potestatum OA, CA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad dictam differentiam, vt numerus spiralis ad eundem numerum binario auctum, ad excessum prædictarum partium differentiæ potestatum OA, CA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, supra factum sub differentia potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, in quadratum CA.

V. G. in spirali lineari, erit trilineum ODC, ad trilineum CDM, vt excessus facti sub OC, in quadratum OA, supra tertiam partem differentiæ cuborum OA, AC, ad excessum talis tertiæ partis huius differentiæ, supra factum sub OC, in quadratum CA. In quadratica, vt excessus facti sub differentia quadratorum OA, CA, in quadratum



tum OA, supra ½ differentiæ quadratoquadratorum OA, CA, ad excessum harum supra factum sub differentia quadratorum OA, AC, in quadratum CA. Et sic in cæteris in infinitum.

Quoniam enim sector ODA, est ad segmentum CAD, ex proposit. anteced. vt factum sub differentia potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, & sub quadrato OA, ad talem partem differentiæ potestatum OA, CA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeat ad ipsam differentiam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum: ergo & diuidendo, trilineum ODC, erit ad segmentum CAD, vt excessus antecedentis prædicti supra dictum consequens, ad ipsum. At, quoniam sector ODA, est ad sectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA; nempe vt factum sub quadrato OA, in differentiam potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub tali differentia, & sub quadrato CA. Ergo & segmentum CAD, erit ad sectorem CAM, vt partes differentiæ potestatum OA, CA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum, ad factum sub differentia potestatum OA, CA, eiusdem gradus cum spirali, & sub quadrato CA. Quare & diuidendo, erit trilineum CDM, ad sectorem CAM, vt excessus huius secundi antecedentis, supra tale secundum consequens, ad ipsum consequens. Ergo facilè concludemus ex æquali, esse OCD, ad CDM, vt excessus primi antecedentis prædicti supra primum consequens, ad excessum secundi antecedentis supra secundum consequens. Quod &c.

SCHOLIVM.

Sed quoniam in superioribus in duabus primis spiralibus compendiosius ostensa est ratio sectoris OAD, ad spatium CAD, compendiosius etiam ostendemus in prima spirali, esse ODC, ad CDM, vt CA, cum $\frac{2}{3}$ OC, ad CA, cum $\frac{1}{3}$ OC. Quod sic patebit. Quia cum probatum sit in schol. 2. proposit. 11. sectorem OAD, esse ad segmentum CAD, vt quadratum OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC. Ergo diuidendo, erit ODC, ad CAD, vt rectangulum OCA, cum $\frac{2}{3}$ quadrati OC, ad rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC (illis enim planis quadratum OA, excedit rectangulum OAC, cum $\frac{2}{3}$ quadrati OC.) Pariter, cum sector ODA, sit ad sectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA. Ergo & spatium CAD, erit ad sectorem CAM, vt rectangulum OAC, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC, ad quadratum CA. Et diuidendo, erit CDM, ad CAM, vt rectangulum OCA, cum $\frac{1}{3}$ quadrati CO, ad quadratum CA. Facile ergo concludetur, ODC, esse ad CDM, vt rectangulum OCA, cum $\frac{2}{3}$ quadrati OC, nempe cum rectangulo sub OC, & sub $\frac{2}{3}$ OC, ad rectangulum OCA, cum $\frac{1}{3}$ quadrati OC, nempe cum rectangulo sub OC, & sub $\frac{1}{3}$ OC. Cum ergo omnia hæc rectangula habeant commune latus OC, erit ODC, ad CDM, vt CA, cum $\frac{2}{3}$ OC, ad CA, cum $\frac{1}{3}$ OC.

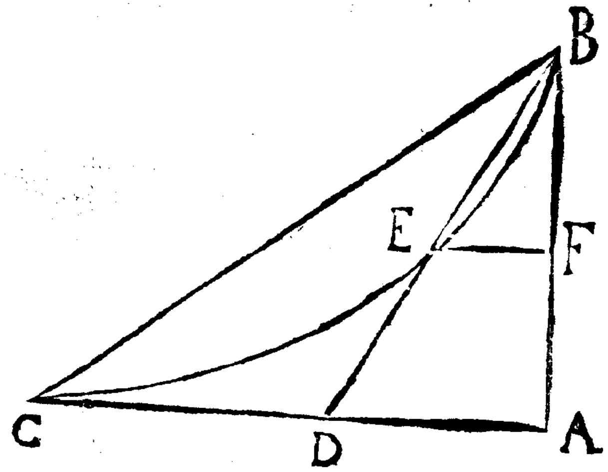
In secunda autem spirali ostendemus eodem modo, ODC, & CDM, æqualia esse. Quare sequitur CD, portionem spiralis quadraticæ esse veluti dimetientem fasciæ ODMC. Quod sic patebit. Quia cum in schol. citat. ostensum fuerit, sectorem esse ad spatium, vt quadratum OA, ad rectangulum OAC, cum $\frac{1}{2}$ quadrati CO. Ergo diuidendo, ODC, erit ad CAD, vt rectangulum OCA, cum dimidio quadrati OC, ad rectangulum OAC, cum dimidio quadrati OC. Sed pariter probabimus diuidendo, CDM, esse ad CAM, vt rectangulum OCA, cum dimidio quadrati OC, ad quadratum CA. Vnde facile

facile concludemus, ODC, esse ad CDM, vt rectangulum OCA, cum ½ quadrati OC, ad rectangulum OCA, cum ½ quadrati OC; nempe vt æquale, ad æquale. Quod &c. Sed etiam in alijs spiralibus poterit prædicta ratio aliqualiter deprimi. Sed videat lector modum depressionis.

PROPOSITIO XIV.

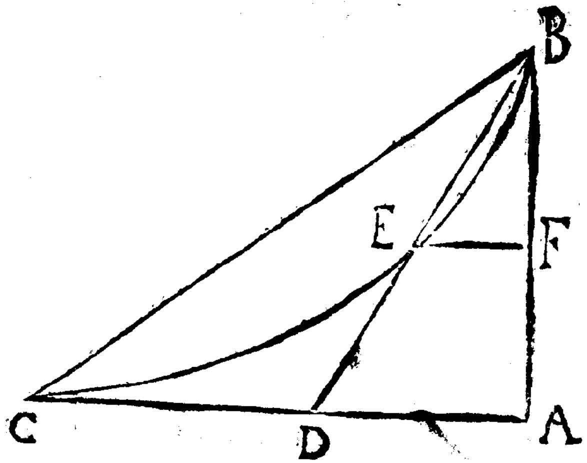
Si cuilibet trilineo à primo, secto vt in proposit. 5. sit circumscriptum triangulum. Erit triangulum pars totius, cuius latus non est diameter trilinei, ad portionem excessus ipsius supra portionem trilinei à se comprehensam, vt factum sub excessu potestatis diametri trilinei vno gradu inferioris potestate trilinei, supra similem potestatem diametri trilinei ad verticem, in quadratum diametri trilinei, ad tales partes excessus potestatis diametri trilinei vno gradu altioris potestate trilinei supra similem potestatem trilinei ad verticem, quæ ad talem excessum se habeant vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum vnitate auctum.

HÆc proposit. est 24. lib. prim. de Infinit. Parab. In schemate ergo proposit. 5. ducatur CB. Dico triangulum CBD, esse ad spatium CBEC, comprehensum à rectis CB, BE, & à curua CE, vt factum sub excessu potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei, supra similem potestatem BF, in quadratum BA, ad tales partes excessus potestatis AB, vno gradu superioris potestate trilinei, supra similem potestatem BF, quæ se habeant ad talem excessum, vt numerus trilinei vnitate minutus ad numerum trilinei vnitate auctum. V. g. in trilineo quadratico, erit vt factum sub FA, in quadratum BA, ad tertiam partem excessus cubi BA, supra cubum BF. In cubico, vt factum sub excessu quadrati BA, supra quadratum BF, in quadratum BA, ad ⅖ excessus quadratoquadrati AB, supra quadratoquadratum BF. In quadratoquadratico, vt factum sub excessu cubi AB, supra cubum BF, in quadratum BA, ad ⅗ excessus quadratocubi AB, supra quadratocubum BF. Et sic in infinitum.



Quoniam enim ex proposit. 5. est CA, ad AD, nem-

nempe triangulum CBA, ad triangulum DBA, vt poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. Ergo per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit triangulum CBD, ad triangulum CBA, vt exceſſus poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, ad poteſtatem BA. Et ducendo hos terminos in quadratum BA, erit CBD, ad CBA, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad factum ſub poteſtate BA, vno gradu inferiore poteſtate trilinei in quadratum BA; nempe ad poteſtatem BA, vno gradu ſuperiorem poteſtate trilinei. At triangulum CBA, eſt ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, nempe ad ſpatium contentum à recta, & curua CB, vt numerus trilinei vnitate auctus ad numerum trilinei vnitate minutum, ex ſchol. 1. propoſit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. nempe vt poteſtas AB, vno gradu ſuperior poteſtate trilinei ad tales ſui partes, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo ex æquali, erit triangulum CBD, ad ſpatium contentum à recta, & curua CB, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad tales partes poteſtatis AB, vno gradu ſuperioris poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus,



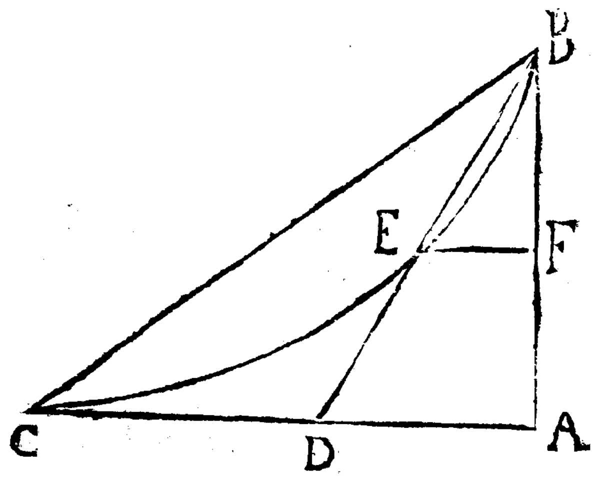
tus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Rurſum, ſpatium comprehenſum à recta, & curua CB, eſt ad ſpatium comprehenſum à recta, & curua BE, vt poteſtas AB, vno gradu ſuperior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF, ex ſchol. 1. propoſit. 3. lib. 1. nempe vt tales partes prædictæ poteſtatis AB, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum, ad ſimiles partes poteſtatis BF. Ergo per conuerſionem rationis, erit ſpatium comprehenſum à recta, & curua CB, ad exceſſum ipſius ſupra ſpatium comprehenſum à recta, & curua BE, vt tales partes poteſtatis AB, vno gradu altioris poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam poteſtatem AB, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei

H

linei vnitate auctum, ad excessum ipsarum supra similes partes similis potestatis BF. Ergo rursum ex æquali, erit triangulum CBD, ad spatium comprehensum à rectis CB, BE, & à curua CE, vt factum sub excessu potestatis AB, vno gradu depressioris potestate trilinei supra similem potestatem BF, in quadratum BA, ad excessum talium partium potestatis AB, vno gradu altioris potestate trilinei, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum, supra similes partes potestatis similis BF; nempe ad tale partem excessus potestatis prædictæ AB, supra similem potestatem BF, quæ se habeant ad ipsum excessum, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Quod ostendere oportebat.

SCHOLIVM.

Recolenti autem superius ostensa in proposit. 11. & 12. & in scholijs earundem, fiet manifestum, quod si AB, in hac proposit. æquetur DA, in schemat. illarum proposit. & BF, in hac ipsi CA, in illis, fiet inquam manifestum, triangulum CBD, in hac, ad spatium comprehensum à rectis CB, BE, & à curua EC, esse vt sector OAD, in illis, ad spatium helicum CAD: & per conuersionem rationis. Nam, in hac ostenditur esse triangulum, ad spatium, vt factum sub quadrato AB, in differentiam



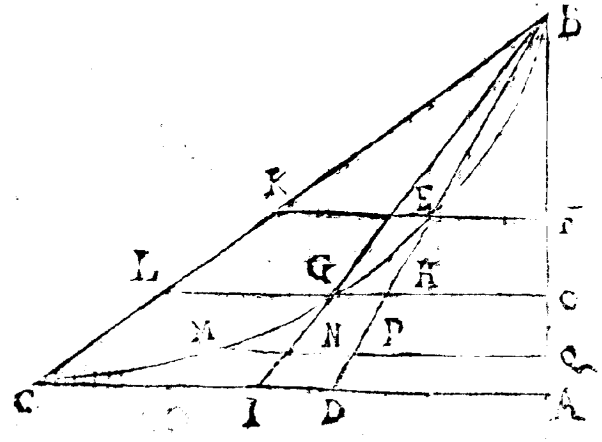
tiam potestatum AB, BF, vno gradu depressiarum potestate trilinei (nempe eiusdem gradus cum spirali, quia semper potestas trilinei supponitur vno gradu altior potestate spiralis) ad tales partes differentiæ potestatum AB, BF, vno gradu altiorum potestate trilinei (nempe duplici gradu altiorum potestate spiralis) quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minutus (nempe vt numerus spiralis) ad numerum trilinei vnitate auctum (nempe ad numerum spiralis binario auctum.) Quæ ratio est eadem, quæ assignatur in proposit. 12. vt consideranti fiet manifestum.

Ex his ergo habemus, quod nunc omnia verificabuntur, quæ vera erant in illis proposit. & in schol. earundem. Ergo ex schol. proposit. 11. deducemus, esse triangulum CBD, ad spatium comprehensum à rectis CB, BE, & à curua CE, in trilineo quadratico, vt quadratum AB, ad rectangulum ABF, cum ½ quadrati AF. In trilineo cubico, vt quadratum AB, ad rectangulum ABF, cum ⅔ quadrati AF. Ex schol. autem proposit. 12. deducemus, proportionem trianguli ad spatium posse reduci ad depressiores potestates, & ideo posse alijs terminis pronunciari, vt ibidem factum fuit, sic. Triangulum ad spatium erit, vt factum sub quadrato AB, in omnes singulares partes potestatis adgregati AB, BF, duplici gradu inferioris potestate trilinei, ad tales partes omnium singularium partium potestatis adgregati AB, BF, eiusdem gradus cum trilineo, quæ se habeant ad ipsas, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum vnitate auctum.

PROPOSITIO XV.

In schem. proposit. anteced. ducta HO, parallela DA. Erit CA, ad HO, vt potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad factum sub OB, in potestatem BF, vno gradu inferiorem potestate trilinei.

Patet, quia ratio CA, ad HO, componitur ex rationibus CA, ad AD, & AD, ad HO. Sed vt CA, ad AD, sic ex proposit. 5. potestas AB, vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem BF. Et vt DA, ad HO, sic AB,



AB, ad BO. Ergo ratio CA, ad HO, erit composita ex prædictis rationibus. Ast ex illis componitur etiam ratio potestatis AB, eiusdem cum trilineo gradus, ad factum sub OB, in potestatem BF, vno gradu inferiorem potestate trilinei. Quare patet propositum.

PROPOSITIO XVI.

In schem. proposit. anteced. si OH, parallela CA, occurrat curuæ in G. Erit CD, ad GH, vt factum sub AB, & sub differentia potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, ad factum sub OB, & sub differentia potestatum OB, BF, itidem vno gradu depressiorum potestate trilinei.

QVoniam enim ex proposit. 5. est CA, ad AD, vt potestas AB, vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem BF; ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit CD, ad CA, vt differentia potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, ad similem potestatem AB; nempe ducendo hæc in AB, vt factum sub AB, in dictam differentiam, ad potestatem AB, eiusdem gradus cum trilineo. Sed quoniam ex natura trilinei, est CA, ad GO, vt potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad similem potestatem BO: & est CA, ad HO, ex proposit. anteced. vt potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad factum sub AB, in potestatem BF, vno gradu inferiorem potestate trilinei. Ergo erit CA, ad GH, vt potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad factum sub OB, & sub differentia potestatum OB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei. Sed supra probata fuit CD, ad CA, vt factum sub AB, & sub differentia potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, ad potestatem AB, eiusdem gradus cum trilineo. Quare ex æquali, erit CD, ad GH, vt factum sub BA, in differentiam potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, ad factum sub OB, in differentiam similium potestatum OB, BF. Quod erat ostendendum.

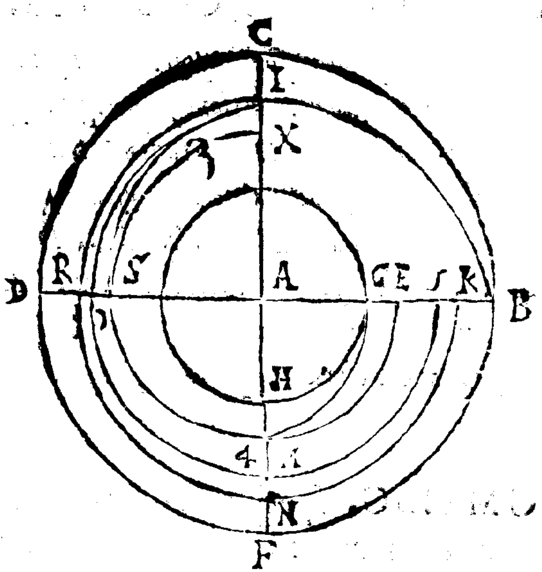
PRO-

PROPOSITIO XVII.

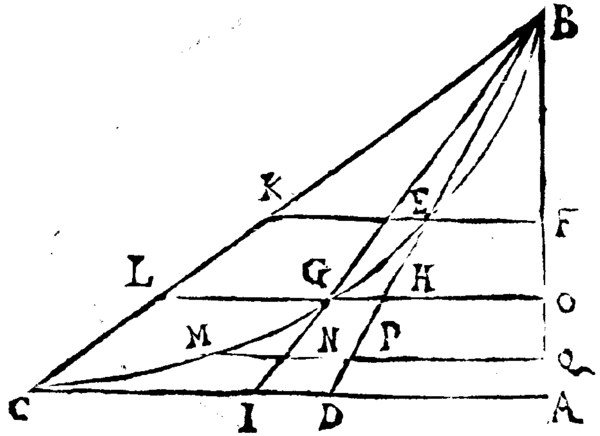
Excessus circuli circumscripti spatio spirali cuiuscunque generis, & ex quacunque reuolutione supra ipsum spatium, est æqualis in schem. proposit. antecedent. trilineo mixto CED, trilinei vno gradu altioris potestate spatij, comprehenso à curua CGE, & à rectis CD, DE: dummodo AB, æquetur semidiametro circuli; BF, semidiametro circuli vnitate minoris, & CA, tot circumferentijs maioris circuli, quotus est numerus reuolutionum spatij.

ESto GMSIBG, spatium spirale cuiuscunque generis, & ortum ex quacunque reuolutione, & FDCB, sit circulus ipsi circumscriptus; sit etiam circulus radij AG, ipso vnitate minor: v. g. si circulus radij AB, sit circumscriptus secundo spatio, sit circulus radij AG, primi spatij: si ille sit circulus tertij spatij, sit hic secundi: &c. item sit trilineum proposit. anteced. CEBA, vno gradu altius gradu spatij spiralis; sitque AB, in trilineo æqualis AB, semidiametro circuli maioris, & BF, in trilineo æqualis semidiametro AG, circuli minoris: pariter sit CA, in trilineo æqualis tot peripherijs FDCB, quotus est numerus spatij GMSIBG: v. g. si spatium sit ex secunda reuolutione, duabus: si tertiæ, tribus: & sic semper. Dico, excessum circuli radij AB, supra dictum spatium, æqualem fore trilineo CGED.

Quo-

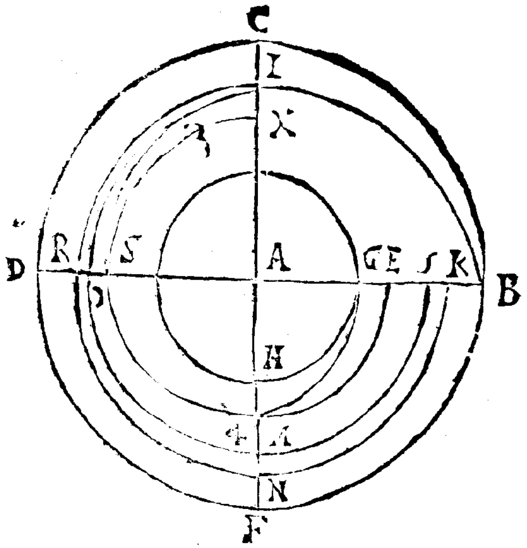


Quoniam enim in ſpirali circulus radij AG, eſt vnitate minor circulo radij AB. Ergo ex natura infinitarum ſpiralium initio explicata, diuiſa poteſtate AB, eiuſdem gradus cum ſpirali in tot partes quotus eſt numerus reuolutionum, poteſtas AG, eiuſdem gradus cum ſpirali continebit ipſas, vna excepta, adeo vt differentia poteſtatum BA, AG, ſit vnica talium partium. Cum verò etiam in trilineo, AB, ſit æqualiter ſecta in F, ſicuti illa in G: etiam differentia poteſtatum AB, BF, eiuſdem gradus cum ſpirali, & gradus vnitate minoris poteſtate trilinei, continebit talium partium vnicam partem. Sed quoniam ex propoſit. 5. eſt CA, ad AD, vt poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimi-

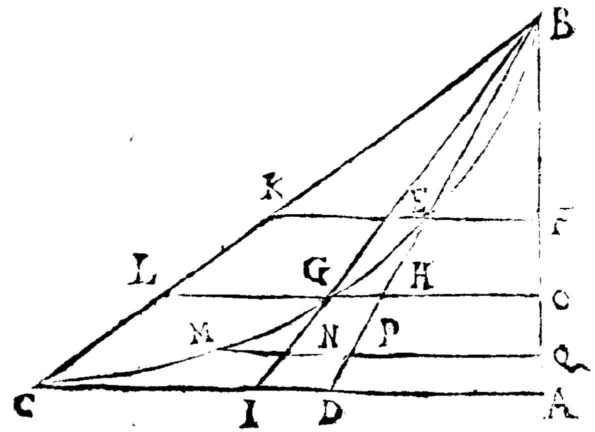


ſimilem poteſtatem BF. Ergo per conuerſionem rationis, erit CA, ad CD, vt poteſtas dicta AB, ad differentiam poteſtatum AB, BF. Sed CA, æquatur tot circumferentijs FDCB, quotus eſt numerus reuolutionum: & differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei continet vnicam partem poteſtatis ſimilis AB, diuiſæ in tot partes quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo CD, erit æqualis vni circumferentiæ FDCB. Sed etiam BA, diameter trilinei æquatur radio AB, circuli. Ergo triangulum CBD, in trilineo, erit æquale circulo radij AB. Quæ ſeruentur.

Tunc in GB, in ſpirali accipiatur quodlibet punctum E, & centro A, interuallo AE, deſcribatur circuli peripheria EM, occurrens ſpirali in M; & facta in trilineo FO, æquali GE, ducatur OHG, paral-



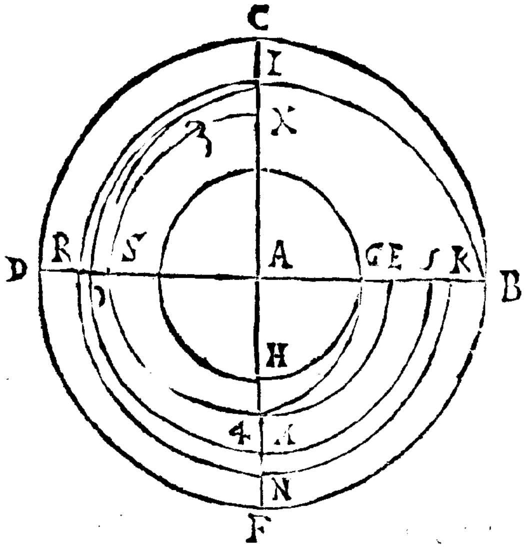
parallela CA. Quoniam in spirali, ex proposit. 4. est peripheria FDCB, ad peripheriam EM, vt factum sub AB, in differentiam potestatum BA, AG, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub EA, in differentiam similium potestatum EA, AG: & pariter in trilineo, ex proposit. anteced. est CD, ad GH, vt factum sub AB, in differentiam potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei, (nempe eiusdem gradus cum spirali) ad factum sub OB, in differentiam similium potestatum OB, BF. Ergo, vt in spirali circumferentia FDCB, ad circumferentiam EM, sic in trilineo, CD, ad GH. Et permutando, vt FDCB, ad CD, sic EM, ad GH. Sed circumferentia FDCB, probata fuit æqualis rectæ CD. Ergo & cir-



circumferentia EM, erit æqualis ipsi GH. Sed FA, in trilineo est æqualis GB, in spirali, & puncta E, O, accepta fuerunt arbitrariè, & inuenta fuit æqualitas. Ergo omnes circumferentiæ excessus circuli radij AB, supra spatium spirale concentricæ ipsi FDCB, æquales erunt omnibus lineis trilinei CGED, parallelis ipsi CD. Ergo excessus prædictus erit æqualis trilineo mixto CGED. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

Qui parui pendet indiuisibilia, & gratulatur excruciari in methodo archimedea, ipsam experiatur, nam eandem veritatem deducet. Attentè etiam consideret, quod probatum fuit de totis, probari



quoque posse de partibus proportionalibus. Non enim tantum totus excessus æquabitur toto trilineo CGED. Sed etiam pars clausa peripheria BCDFB, spirali BISM, peripheria ME, & recta EB, erit æqualis quadrilatero CGHD. Item reliqua pars GMEG, æqualis trilineo EGH. Idem dicatur de cæteris partibus proportionalibus.

SCHOLIVM II.

Ergo per conuersionem rationis, erit circulus ad ipsum spirale spatium, vt triangulum CBD, ad spatium comprehensum rectis CB, BE, & curua CGE.

Cum

Cum verò ex proposit. 14. sit triangulum CBD, ad illud spatium, vt factum sub differentia potestatum AB, BF, vno gradu depressiorum potestate trilinei (nempe eiusdem gradus cum spirali) in quadratum BA, ad tales partes differentiæ potestatum AB, BF, vno gradu superiorum potestate trilinei (nempe duplici gradu superiorum potestate spiralis,) quæ se habeant ad ipsam, vt numerus trilinei vnitate minutus (nempe vt numerus gradus spiralis) ad numerum trilinei vnitate auctum (nempe ad numerum gradus spiralis binario auctum.) Ergo etiam circulus radij AB, erit ad spatium spirale GMSIBG, vt factum sub differentia potestatum BA, AG, eiusdem gradus cum spirali, in quadratum BA, ad tales partes differentiæ potestatum BA, AG, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad dictam differentiam, vt numerus gradus spiralis ad ipsum binario auctum.

SCHOLIVM III.

Immo ex schol. citat. proposit. 14. poterimus alias compendiosiores rationes assignare. Nam in spirali lineari deducemus, esse circulum ad spatium, vt quadratum BA, ad rectangulum BAG, cum $\frac{1}{3}$ quadrati BG. In quadratica, vt idem quadratum BA, ad idem rectangulum BAG, cum $\frac{1}{2}$ quadrati GB. Et vniuersaliter deducemus, esse circulum ad spatium, vt factum sub quadrato AB, in omnes singulares

lares

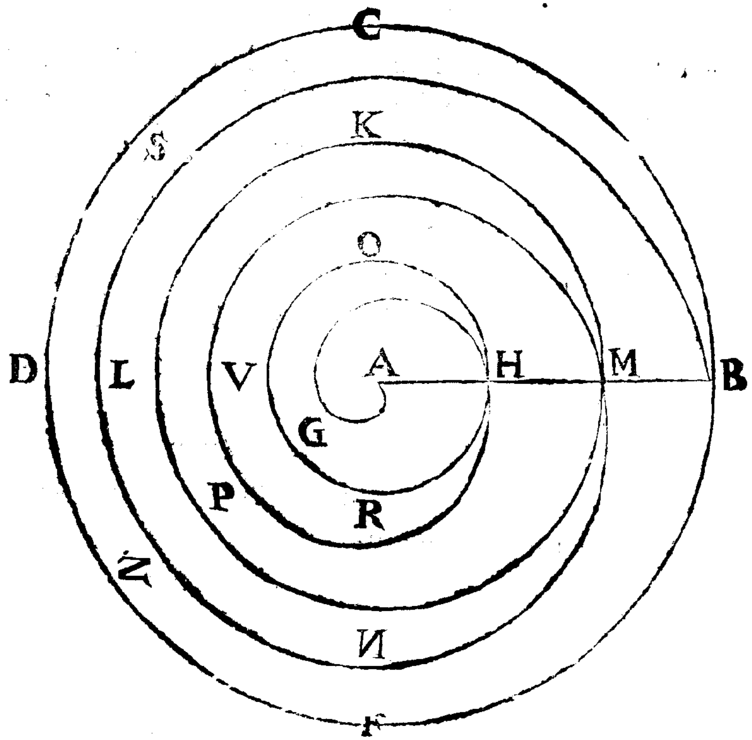
lares partes poteſtatis adgregati AB, AG, vnius gradus inferioris, gradu ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati AB, AG, vno gradu altioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

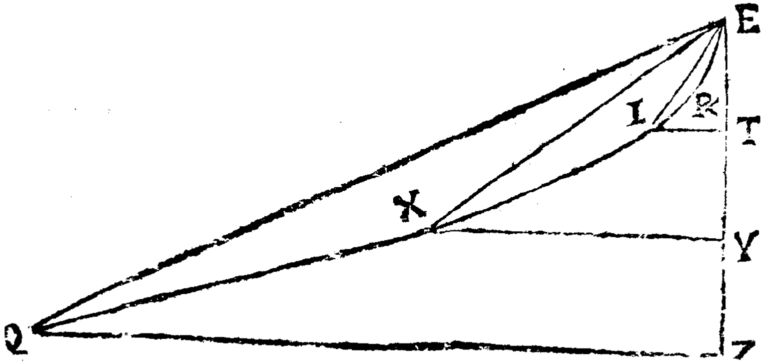
PROPOSITIO XVIII.

Omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiuè inſcripta in quibuslibet circulis ſimul ſumpta, ſunt ad tot circulos maiores quotus eſt numerus reuolutionum, vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum.

SInt quælibet ſpatia ſpiralia AGH, HRPM, MNLSB, inſcripta in circulis radiorum AH, AM, AB. Dico omnia illa ſpatia ſimul ſumpta eſſe ad tot circulos radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum (nempe in noſtro caſu ad tres) vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Nempe in prim. vt 1. ad 3. In ſecund. vt 2. ad 4. vt 3. ad 5. &c.

Sit etiam triangulum QEZ, cum ſibi inſcripto trilineo parabolico QEZ, gradus congruentis gradui ſpiralis; ſitque talis indolis, vt ZE, YE, ET, ſint æquales AB, AM, AH; & QZ, ſit æqualis tot peripherijs BFDC, quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo ex propoſit. anteced. ſpatium contentum rectis QE, EX, & curua QX, erit æquale ſpatio ſpirali





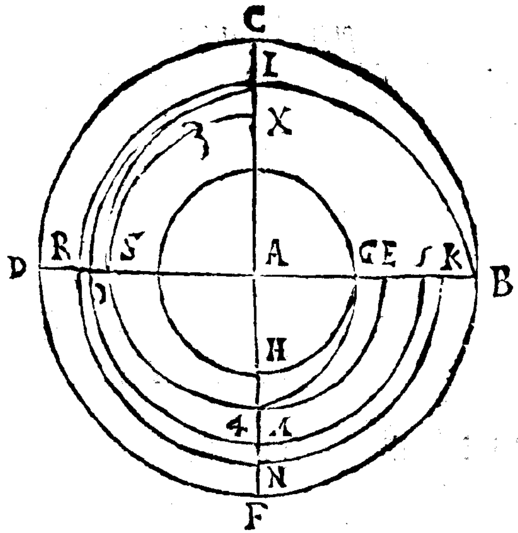
rali MNZLSBM. Eodem modo patebit ſpatium XEJX, æquale eſſe ſpatio HRPOMH: & IEI, æquale eſſe ſpatio AGH. Ergo totus exceſſus trianguli QEZ, ſupra trilineum, erit æqualis omnibus ſpatijs ſpiralibus ſimul ſumptis. Sed etiam triangulum QEZ, eſt æquale tot circulis radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo exceſſus trianguli QEZ, ſupra trilineum erit ad ipſum triangulum, vt omnia ſpatia ſpiralia ad tot circulos radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum. Nempe ex conuerſo coroll. propoſit. 9. vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Nempe vt ſpatium ſpirale inſcriptum in primo circulo, ad ipſum. Quod &c.

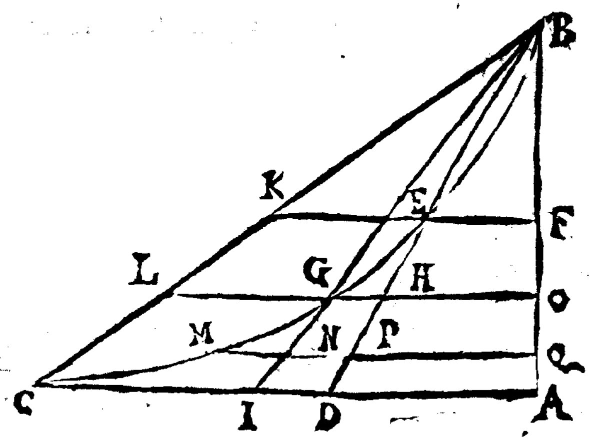
PROPOSITIO XIX.

In ſchematibus prop. 17. exceſſus ſpatij ſpiralis GMSIBG, ſupra circulum radij AG, eſt æqualis in trilineo ſpatio comprehenſo à rectis CK, KE, & à curua CGE.

CVm enim probatum ſit in propoſit. 17. triangulum CBD, æquale fore circulo radij AB: & cum AB, BF, ſint æquales ſemidiametris BA, AG; facile probabimus, etiam triangulum kBE, æquale fore circulo radij AG. Sed totum ſpatium CBEGC, oſtenſum fuit æquale toti ſpatio ſpirali. Ergo etiam ſpatium CkEGC, erit æquale reliquo ſpatij ſpiralis dempto ab eo circulo radij AG. Quod &c.

PRO-



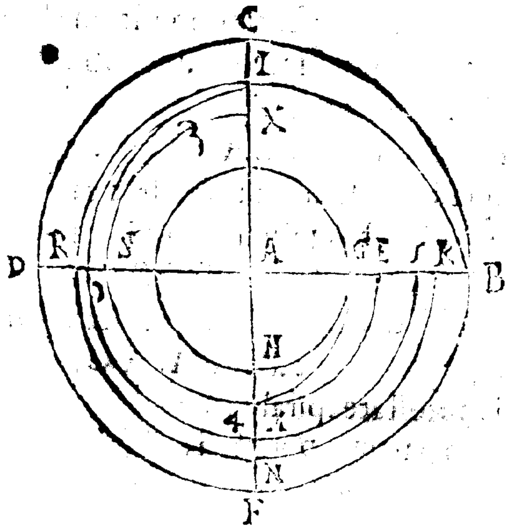


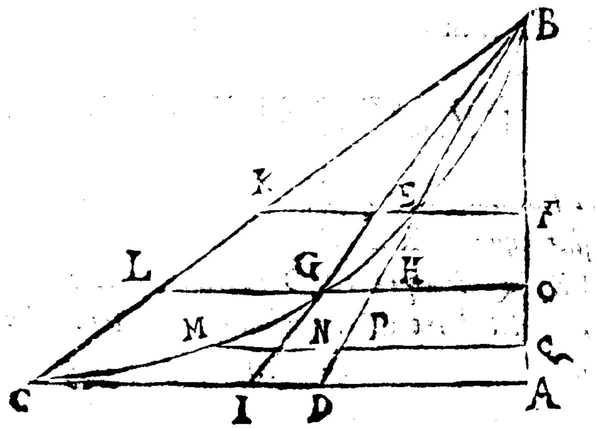
K PRO-

PROPOSITIO XX.

In Diagrammatismis proposit. anteced. si in spirali accepto vbilibet puncto M, & ducta A M, centro A, interuallo A M, describatur peripheria E M. Sector A M E, erit ad spatium spirale A M G A, quod comprehendit, vt factum sub quadrato E A, in differentiam potestatum E A, A G, eiusdem gradus cum spirali, ad tales partes differentiæ potestatum E A, A G, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum.

NAM in trilineo, supposita B O, æquali A E, & FO, æquali GE, iam ex schol. pri. prop. 17. patet, trilineum G E H, in trilineo æquale esse excessui G M F G, & G H, æqualem fore circumferentiæ F M. Cum ergo etiam radius A E, sit æqualis B O, altitudini trianguli G B H, (ducta prius recta B G) ergo triangulum B G H, erit æquale sectori A E M: & erit ad trilineum G E H, vt sector M A E, ad excessum ipsius supra spatium; nempe ad G M F G. Ergo & per conuersionem rationis, erit sector ad spatium A M G, à se comprehensum, vt triangulum G B H, ad spatium G B I G. Sed ex proposit. 14. triangulum est ad illud spatium in assignata ratione. Quare patet propositum.





SCHOLIVM.

Etiam ergo in præsenti propositione licebit colligere ea omnia, quæ supra varijs vicibus fuerunt collecta. Nimirum in spirali lineari, esse sectorem ad spatium, vt quadratum EA, ad rectangulum EAG, cum ½ quadrati EG. In quadratica, vt quadratum EA, ad rectangulum EAG, cum ⅓ quadrati GE. Et vniuersaliter, esse sectorem ad spatium, vt factum sub quadrato EA, in omnes singulares partes adgregati potestatis EA, AG, vnius gradus inferioris potestate spiralis, ad tales partes omnium singularium partium potestatis adgregati EA, AG, vno gradu superioris potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsas, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum.

PROPOSITIO XXI.

Si in schematibus proposit. anteced. AB, BF, in trilineo sint æquales KA, AG, in spirali; & circumferentia IRNk, sit æqualis CD, in trilineo, item circumferentiam IR, lineæ CI, in trilineo, & DA, in trilineo æqualis tot integris circumferentijs radij Ak, quotus est numerus reuolutionum vnitate minor. Trilineum CGI, in trilineo, erit æquale trilineo RIS, in spirali, quod est excessus sectoris RAI circumscripti spatio SAI, supra ipsum.

Etenim

Etenim, cum CI, linea in trilineo sit æqualis circumferentiæ IR, in spirali, & AB, in trilineo æqualis semidiametro KA, seù RA, in spirali: triangulum CBI, erit æquale sectori RAI. Tunc in RS, accipiatur quodlibet punctum 2, & describatur circumferentia 23, semidiametro A2, occurrens spirali in 3; & facta in trilineo BQ, æquali A2, sit MNPQ, parallela CA. Ad modum dictorum in proposit. 17. deducemus, MNP, in trilineo æqualem fore circumferentiæ 3245, in spirali. Cum verò etiam NP, in trilineo sit æqualis circumferentiæ 245, in spirali (quia ex hypothesi, ID, est æqualis circumferentiæ RNk.) Ergo MN, in trilineo, erit æqualis circumferentiæ 23, in spirali. Quia verò RS, est æqualis OA; expertis in methodo indiuisibilium patebit, omnes circumferentias trilinei RIS, in spirali concentricas circumferentiæ RI, æquales fore omnibus lineis trilinei CGI, parallelis CI. Ac proinde trilineum ipsum RIS, æquale fore trilineo CGI. Quod &c.

SCHOLIVM.

Cum verò supra probatum sit, triangulum CBI, æquale esse sectori RAI; ergo triangulum BCI, erit ad trilineum CGI, vt sector RAI, ad trilineum RIS. Quare per conuersionem rationis, erit sector ad spatium SAI, quod includit, vt triangulum

lum CBI, ad spatium CBGC. Cum ergo ex propofit. 14. fit triangulum CBI, ad spatium, vt factum sub quadrato AB, in differentiam potestatum AB, BO, vnius gradus inferioris potestate trilinei (nempe eiusdem gradus cum spirali) ad differentiam potestatum AB, BO, vnius gradus superioris potestate trilinei (nempe duplici gradu altiorum potestate spiralis;) sic etiam erit sector RAI, ad spatium spirale. Nempe erit ad ipsum, vt factum sub quadrato RA, in differentiam potestatum RA, AS, eiusdem gradus cum spirali, ad differentiam potestatum RA, AS, duplici gradu altiorum potestate spiralis.

Cum ergo proportio reperta inter sectorem, & spatium, sit similis aliqualiter supra repertis, patebit omnia compendia varijs vicibus supra explicata, posse etiam assignari in præsenti. Verum ergo erit etiam in presenti, quod in spirali lineari, erit sector ad spatium, vt quadratum RA, ad rectangulum RAS, cum $\frac{1}{3}$ quadrati RS. Item in spirali quadratica, erit sector ad spatium, vt quadratum RA, ad rectangulum RAS, cum $\frac{1}{5}$ quadrati RS. Pariter vniuersaliter poterimus pronunciare. Esse sectorem ad spatium, vt factum sub quadrato RA, in omnes singulares partes adgregati potestatis RA, AS, vnius gradus inferioris potestate spiralis, ad tales partes omnium singularium partium potestatis adgregati RA, AS, vno gradu superioris potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsas, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Omnia spatia spiralia successiue inscripta in quibuslibet circulis simul sumpta, vna cum quolibet segmento spatij reuolutionis vnitate maioris inscripto in insectore, sunt ad tot integros circulos sectoris quotus est numerus spatiorum integrorum, vna cum ipso sectore, vt numerus gradus spiralis ad numerum binario auctum.

IN schematibus proposit. anteced. supponamus circulum radij AG, esse circulum circumscriptum spatio spirali cuiuscumque reuolutionis, v.g. secundæ, ita vt intra ipsum intelligendus sit circulus primus circumscriptus spatio primæ reuolutionis: sit etiam circulus radij AB, circumscriptus spatio tertiæ reuolutionis: & centro A, interuallo quolibet AE, intelligatur sector MAE, circumscriptus MAG, segmento spatij tertiæ reuolutionis. Dico omnia spatia spiralia successiue (nempe in casu nostro primæ, & secundæ reuolutionis) vna cum segmento MAG, esse ad tot integros circulos radij AE, quotus est numerus spatiorum integrorum (nempe in casu nostro ad duos) vna cum sectore MAE, vt numerus gradus spiralis, ad numerum binario auctum.

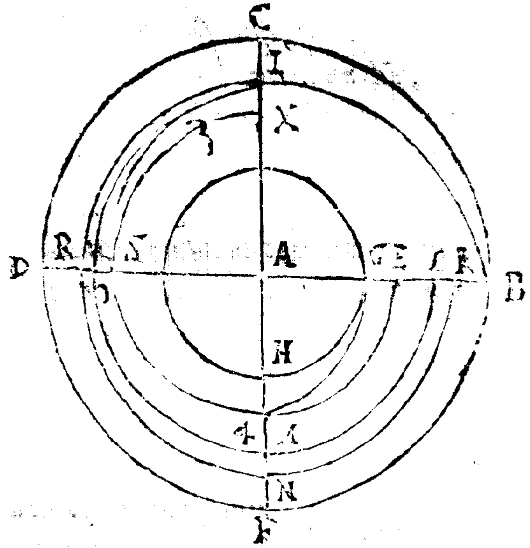
Supponamus enim trilineum sæpe dictum CBA, & C. esse talis indolis, vt AB, sit æqualis AE, in spirali, & BF, sit æqualis AG: item AD, sit æqualis

lis duabus circumferentijs radij AE, & CD, sit æqualis circumferentiæ EM. Facile patebit, triangulum CBD, æquale esse sectori MAE; & totum triangulum CBA, æquale esse duobus circulis radij AE, & sectori MAE: item ex proposit. anteced. facile patebit, in trilineo trilineum mixtum CGED, æquale esse in spirali trilineo GME: & CBEC, in trilineo, æquale esse MAG, in sectori. Pariter ad modum proposit. 18. patebit, spatium EB, in trilineo æquale esse alijs duobus spatijs spiralibus inclusis intra circulum radij AG, & alium ipsi inclusum (licet enim schema non exprimet, facile hoc percipietur si consideremus circulum radij AG, in præsenti gerere vicem circuli radij AM, in dicta proposit. 18.) Quare manifeste patebit, duos circulos radij AE, vna cum sectore AME, esse ad primum, & secundum spatium spirale, vna cum segmento MAG, vt triangulum CBA, ad excessum ipsius supra trilineum. Nempe ex sæpe dictis, vt numerus gradus spiralis binario auctus, ad numerum. Nempe vt circulus circumscriptus primo spatio ad ipsum. Quare conuertendo, patet propositum. Quod &c.

PROPOSITIO XXIII.

Si in spatio anteced. proposit. semidiametro minori linea inscribatur sector SAX. Erit RIS, trilineum, excessus sectoris maioris supra spatium, ad SIX, trilineum, excessum spatij supra minorem sectorem, vt excessus facti

sub differentia potestatum RA, AS, eiusdem gradus cum spirali, in quadratum RA, supra tales partes differentiæ potestatum RA, SA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad dictam differentiam, vt numerus spiralis ad eundem numerum binario auctum, ad excessum prædictarum partium differentiæ potestatum RA, SA, duplici gradu altiorum potestate spiralis, supra factum sub differentia potestatum RA, AS, eiusdem gradus cum spirali, in quadratum SA.

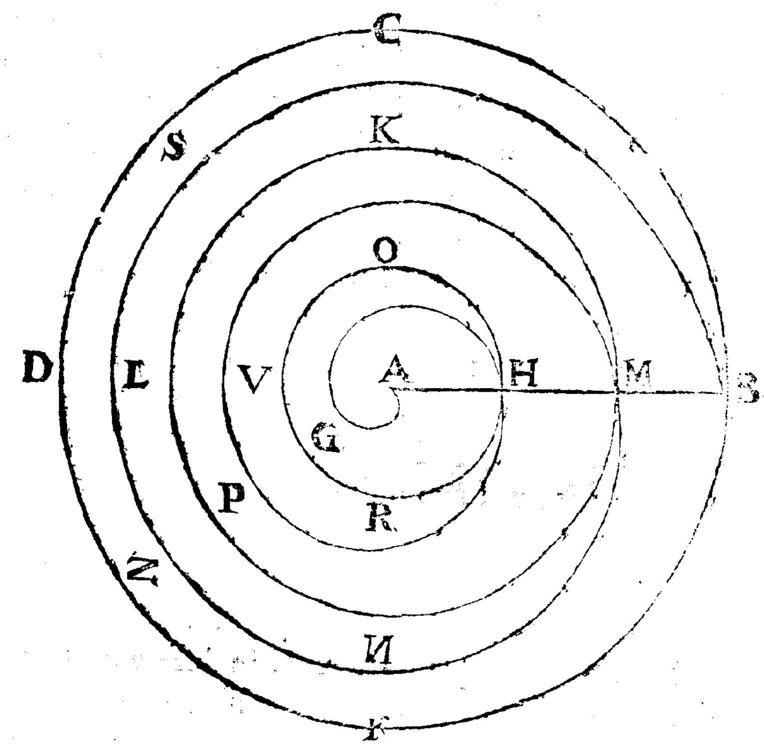


Hæc demonstratio erit similis traditæ in proposit. 13. quæ ideo ex ipsa petenda est. Immo omnia compendia deducta in schol. eiusdem, poterimus deducere etiam in præsenti. Verum ergo etiam erit nunc, esse in spirali lineari, RIS, ad SIX, vt RA, cum ² RS, ad SA, cum ¹ RS. Item in spirali quadratica, RIS, SIX, æqualia esse. Et in alijs spiralibus poterimus forsitan reperire alia compendia, quæ lector poterit proprio Marte excogitare.

PROPOSITIO XXIV.

Primi circuli spatium helicum cuiuscunque gradus, ad spatium helicum secundi circuli, est vt factum sub tali parte quadrati radij primi circuli, quæ se habeat ad ipsum, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum, & sub differentia potestatum radiorum primi, & secundi circuli, eiusdem gradus cum spirali, ad tales partes differentiæ potestatum horum radiorum duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Spatium vero secundi circuli ad spatium tertium, est vt factum ex hoc secundo facto, & ex differentia potestatum radiorum tertij, & secundi circuli eiusdem gradus cum spirali, ad simile factum sub simili parte differentiæ potestatum radiorum secundi, & tertij circuli, duplici gradu altiorum potestate spiralis, & sub differentia radiorum primi, & secundi circuli eiusdem gradus cum spirali, & sic deinceps in reliquis.

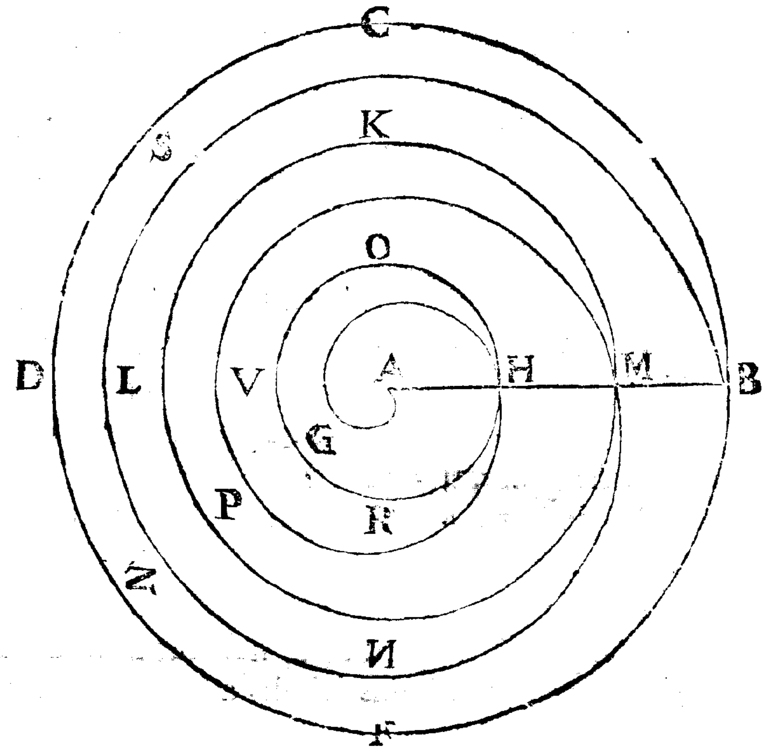
Sit primum spatium helicum cuiuscunque gradus AGH, cum primo circulo radij AH: item



item secundum spatium HRPMH, cum secundo circulo radij AM: item tertium cum tertio circulo radij AB. Dico primum spatium AGH, esse ad secundum spatium HRPMH, vt factum sub tali parte quadrati AH, quæ se habeat ad ipsum, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum, & sub differentia potestatum MA, AH, eiusdem gradus cum spirali, ad talem partem differentiæ potestatum MA, AH, duplici gradu altiorum potestate

 spi-

spiralis, quæ se habeant ad ipsam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Spatium secundum ad spatium tertium MNZLSBM, vt factum sub hoc secundo facto, & sub differentia potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub simili parte differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate spiralis, & sub differentia potestatum MA, AH, eiusdem gradus cum spirali. Et sic in infinitum. V.g. in spirali lineari erit primum spatium ad secundum, vt factum sub $\frac{1}{2}$ quadrati AH, in HM, ad $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM. Secundum vero spatium ad tertium erit, vt factum sub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM, & sub MB, ad factum sub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AM, AB, & sub HM. In spirali quadratica, erit primum spatium ad secundum, vt factum sub $\frac{2}{4}$ quadrati AH, in differentiam quadratorum AH, AM, ad $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AH, AM. Secundum spatium erit ad tertium, vt factum sub dicta parte differentiæ, & sub differentia quadratorum AB, AM, ad factum sub $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AM, AB; & sub differentia quadratorum MA, AH; & sic in alijs. Primum enim spatium AGH, ad secundum spatium HRPMH, habet rationem compositam ex ratione ipsius ad primum circulum radij AH; huius, ad secundum circulum radij AM; & huius, ad secundum spatium. Primum spatium ad primum circulum est, vt numerus gradus spiralis ad nume-



numerum binario auctum ex coroll. proposit. 9. nempe vt talis pars quadrati AH, quæ se habeat ad ipsum, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum, ad ipsum quadratum AH. Circulus radij AH, ad circulum radij AM, est vt quadratum AH, ad quadratum radij AM. Circulus radij AM, est ad spatium secundum helicum, quod comprehendit, ex schol. 2. proposit. 17. vt factum sub quadrato AM, in differentiam potestatum MA, AH, eiusdem

dem gradus cum spirali, ad talem partem differentiæ potestatum MA, AH, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeat ad ipsam differentiam, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum. Ergo primum spatium helicum ad secundum habet rationem compositam ex omnibus his rationibus. Sed ex rationibus partis quadrati AH, quæ se habeat ad ipsum, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum, ad quadratum AH, & huius ad quadratum AM, componitur ratio prædictæ partis quadrati AH, ad quadratum AM. Ergo ratio primi spatij ad secundum, erit tantum composita ex ratione dictæ partis quadrati AH, ad quadratum AM, & facti sub quadrato AM, in differentiam potestatum AM, AH, eiusdem gradus cum spirali, ad partem differentiæ potestatum AM, AH, duplici gradu altiorum potestate spiralis, se habentem ad dictam differentiam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Sed ex dictis rationibus componitur ratio facti sub dicta parte quadrati AH, in factum sub quadrato AM, in differentiam potestatum AM, AH, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub quadrato AM, in dictam partem differentiæ potestatum AM, AH, duplici gradu superiorum potestate spiralis. Ergo primum spatium erit ad secundum in præfata ratione. Sed cum in ambobus terminis proportionis reperiatur quadratum AM, si potestates terminorum deprimantur, erit primum spatium ad secundum, vt factum sub dicta parte quadrati AH, in differentiam potestatum MA, AH, eiusdem gradus cum spirali, ad similem partem differentiæ potestatum AH, AM, duplici gradu superiorum potestate spiralis. Quod primo erat ostendendum.

Quod verò ratio secundi spatij ad tertium sit ea, quæ supra dicta fuit, probabitur ferè eodem modo. Nam ratio secundi spatij ad tertium componitur ex ratione ipsius ad secundum circulum; huius ad tertium; & tertij circuli ad tertium spatium. Ratio secundi spatij ad secundum circulum est, vt pars differentiæ potestatum AH, AM, duplici gradu superiorum potestate spiralis, se habens ad ipsam differentiam, vt numerus gradus spiralis ad numerum binario auctum, ad factum sub quadrato AM, in differentiam potestatum AM, AH, eiusdem gradus cum spirali, ex schol. 2. proposit. 15. Ratio circuli radij AM, ad circulum radij AB, est vt quadratum AM, ad quadratum AB. Ratio circuli radij AB, ad tertium spatium est, vt factum sub quadrato AB, in differentiam potestatum AB, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad partem differentiæ potestatum AB, AM, duplici gradu superiorum potestate spiralis, se habentem ad dictam differentiam, vt numerus ad numerum binario auctum ex schol. citat. Ergo ratio secundi spatij ad tertium componetur ex omnibus antecedentibus ad omnia consequentia: nempe erit, vt factum sub omnibus antecedentibus ad factum sub omnibus consequentibus. Sed tam in facto ex omni-

omnibus antecedentibus, quam in facto ex omnibus consequentibus reperitur factum sub quadratis AM, AB. Si ergo tam factum sub omnibus antecedentibus, quam factum sub omnibus consequentibus deprimatur, nempe auferatur ab ipsis facta sub quadratis AM, AB, nihilominus seruabitur eadem proportio. Erit ergo à primo ad vltimum, secundum spatium ad tertium spatium, vt factum sub parte differentiæ potestatum AH, AM, duplici gradu superiorum potestate spiralis, se habente ad ipsam differentiam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum, & sub differentia potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad factum sub parte simili priori differentiæ potestatum duplici gradu altiorum spirali, ipsarum BA, AM, & sub differentia potestatum MA, AH, eiusdem gradus cum spirali. Quod secundo erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Etiam in præsenti harum proportionum sunt reperibilia compendia. Sed quia proportio spatiorum spiralium inter se potest expiscari iucundius ex analogia reperta inter dicta spatia, & trilinea parabolica, ideo hæc explicanda prius sunt, postea ipsa compendia assignabimus.

PROPOSITIO XXV.

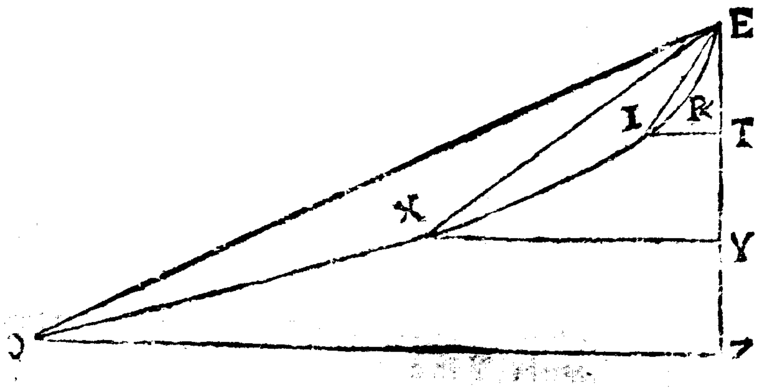
Si quodlibet ex infinitis trilineis parabolicis secetur linea basi parallela, & tam toto trilineo, quam trilineo ad verticem circumscribantur triangula. Erit excessus trianguli circumscripti toto trilineo supra ipsum, ad excessum trianguli circumscripti trilineo ad verticem supra ipsum, vt potestas diametri trilinei vno gradu altior potestate trilinei, ad similem potestatem diametri trilinei ad verticem.

Esto quodlibet trilineum parabolicum QXEZ, cum sibi circumscripto triangulo QEZ, & sit ducta XY, parallela basi QX, & trilineo ad verticem XEY, sit circumscriptum triangulum XEY. Dico spatium comprehensum à recta, & curua QE, esse ad spatium comprehensum à recta, & curua XE, vt potestas ZE, vno gradu altior potestate trilinei ad similem potestatem YE. V. g. in quadratico, vt cubus, ad cubum. In cubico, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum, & sic in infinitum. Hæc propositio ostensa fuit in schol. pri. proposit. 3. lib. pri. de Infinit. Parab. ex eo quod trilinea sint eiusdem rationis. Cum ergo eandem habeat rationem tam triangulum ad triangulum, quam trilineum ad trilineum, quam excessus trianguli supra trilineum, ad excessum trianguli supra trilineum; & triangulum QEZ, sit ad triangulum XEY, vt potestas ZE, vno gradu altior potestate trilinei ad similem poteſtatem EY (quia hæc ratio componitur ex ratione QZ, ad XY; nempe ex ratione poteſtatis ZE, eiuſdem gradus cum trilineo, ad ſimilem poteſtatem EY, & ex ratione ZE, ad EY: quæ duæ componunt rationem poteſtatis EZ, vno gradu altioris poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY;) erit etiam exceſſus trianguli QEZ, ſupra ſuum trilineum, ad exceſſum trianguli XEY, ſupra ſuum trilineum, vt poteſtas ZE, vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY. Quod &c.

SCHOLIVM.

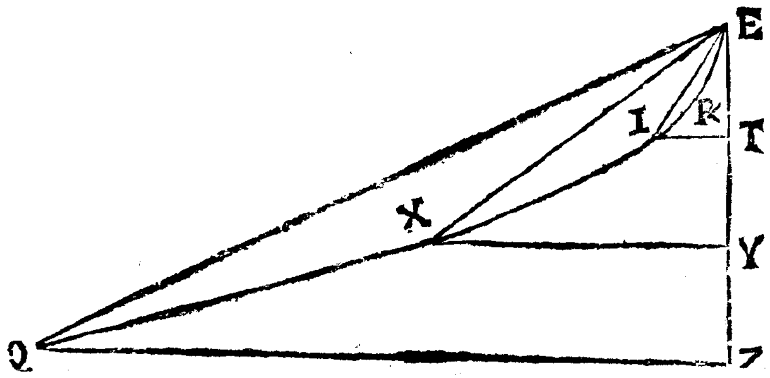
Deducemus ergo diuidendo, eſſe ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEX, vt differentia poteſtatum ZE, EY, vno gradu ſuperiorum poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY. Quod ſi iterum ducta IΓ, parallela XY, fiat triangulum IET; erit exceſſus XEI, ad exceſſum IEI, vt poteſtas YE, vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem ET. Et diuidendo, erit exceſſus XEIX, ad IEI, vt differentia poteſtatum dictarum YE, ET, ad ſimilem poteſtatem ET. Erit ergo etiam ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEIX, vt differentia poteſtatum ZE, EY, vno gradu altiorum poteſtate trilinei, ad differentiam ſimilium poteſtatum YE, ET.

Si ergo ſupponamus QEZ, eſſe trilineum parabolicum quadraticum, & ET, TY, YZ, eſſe æquales; quia EY, eſt dupla ET, ergo cubus ET, erit ad cubum EY, vt 1. ad 8. & ad differentiam cuborum, vt 1. ad 7. Ergo etiam ſpatium IEI, erit ad ſpatium XEIX, vt 1. ad 7. Pariter, quia ZE, eſt ſeſquialtera EY, erit eius cubus 27; & differentia cuborum EY, EZ, 19. Ergo differentia cuborum EY, ET, erit ad differentiam cuborum EY, EZ, vt 7. ad 19. & in eadem ratione erit ſpatium XEIX, ad ſpatium QEXQ. Et eodem modo quadruplicata EΓ, quintuplicata &c. reperiremus ſpatium QEXQ, eſſe ad immediate maius, vt 19. ad 37. Hoc ad im-



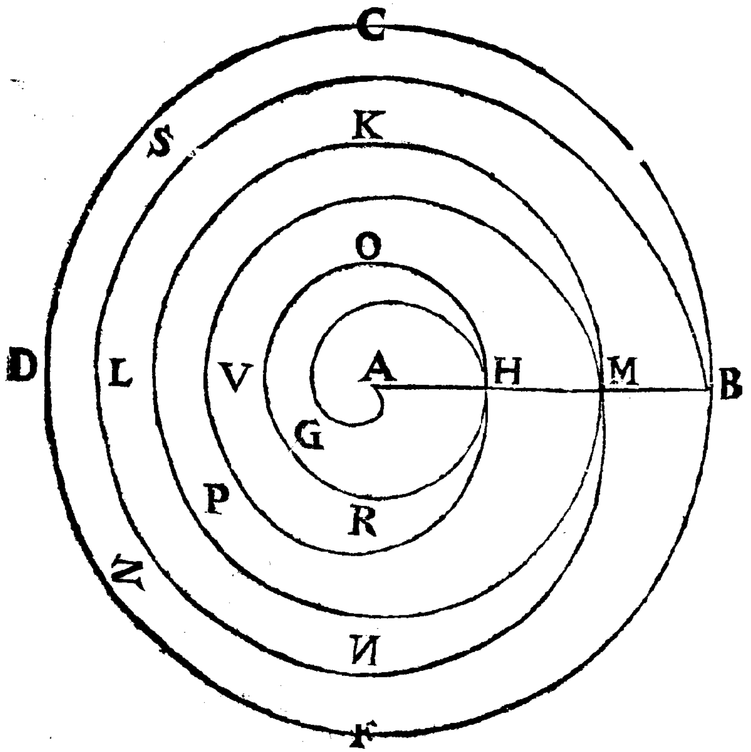
mediate maius vt 37. ad 61. &c. Vnde diuidendo colligeres ſus eſſe IEI, ad exceſſum XEIX, ſupra ipſum, vt 1. ad 6. ſpatium XEIX, ad exceſſum ſpatij QEXQ, ſupra ipſum, vt 6. ad 12. QEXQ, ad exceſſum immediate ſuperioris ſupra ipſum, vt 12. ad 18. & ſic in infinitum augendo conſequens ſenario.

Sed ſupponamus QEZ, eſſe trilineum parabolicum cubicum, & quadratum YE, duplum eſſe quadrati ET; quadratum ZE, eius triplum, &c. Quia ergo quadratum YE, duplum eſt quadrati ET, ſi ſupponamus quadratum ET, eſſe vnitatem, erit quadratum YE. 2. & quia quadratoquadratum oritur ex multiplicatione quadrati in ſe ipſum, erit quadratoquadratum EY, 4. Erit ergo quadratoquadratum YE, ad quadratoquadratum ET, vt 4. ad 1. & diuidendo, vt 3. ad 1. Erit ergo ſpatium XEIX, ad IEI, vt 3. ad 1. Item, quoniam quadratum ZE, eſt 3. & quadratoquadratum ZE, 9. erit differentia quadratoquadratorum ZE, EY, 5. Erit ergo ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEIX, vt 5. ad 3. Quod ſi quadratum ET, intelligeretur quadruplicatum, adeo vt eius quadratoquadratum eſſet 16, & intelligerentur aucta omnia; eſſet ſpatium immediate maius, ad ſpatium QEXQ, vt 7. ad 5. & ſic in infinitum ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab vnitate procedentium. Diuidendo ergo, erit ſpatium IEI, ad exceſſum ſpatij XEIX, ſupra ipſum, vt 1. ad 2. ſpatium vero XEIX,



XEIX, erit ad exceſſum ſpatij QEXQ, ſupra ipſum, vt 3. ad 2. Ipſum vero QEXQ, ad exceſſum immediate maioris ſupra ipſum, vt 5. ad 2. & ſic in infinitum, ita vt omnia antecedentia contineant ſeriem imparium incipientium ab vnitate, conſequens verò ſit ſemper binarium.

His explicatis, ſupponamus diametrum ZE, trilinei æqualem eſſe AB, ſemidiametro circuli diagrammatis propoſit. 24. YE, in trilineo ipſi AM, in circulo, & TE, in trilineo æqualem AH, in ſpirali, & ZQ, baſim trilinei æqualem tot circumferentijs FDCB, quotus eſt numerus reuolutionum, v. g. in caſu noſtro tribus. Ergo ex propoſit. 17.



17. ſpatium in trilineo QEXQ, eſt æquale in ſpirali tertio ſpatio MNLSBM: item ſpatium XEIX, in trilineo æquale ſecundo ſpatio ſpirali HRPMH: item ſpatium in trilineo IEI, erit ex propoſit. 9. æquale primo ſpatio ſpirali AGHA. Ergo eandem proportionem habebunt ſpatia helica ad inuicem, quam habent prædicta ſpatia in trilineo. Cum ergo vniuerſaliter ſint in trilineo ſpatium primum ad ſecundum, vt poteſtas diametri ip-

ſius

ſius ſcilicet ET, vno gradu altior poteſtate trilinei ad differentiam poteſtatum ſimilium ipſius, ET, EY, diametri ſecundi ſpatij; & vt ſecundum ſpatium ad tertium, ſic hæc differentia ad ſimilem differentiam poteſtatum EY, EZ; & ſic in infinitum: ſic in ſpirali, erit generaliter primum ſpatium ad ſecundum, vt poteſtas AH, radij primi circuli duplo gradu altior poteſtate ſpiralis (gradus enim trilinei ſuperat gradum ſpiralis vnitate) ad differentiam poteſtatum AH, radij primi circuli, & AM, radij ſecundi circuli. Secundum verò ſpatium erit ad tertium, vt dicta differentia ad ſimilem differentiam radiorum AM, AB. Et ſic in infinitum. Immo ea compendia, quæ in trilineis quadratico, & cubico collecta fuerunt, poterunt etiam colligi in ſpirali lineari, & quadratica, ſed hæc in duabus ſequentibus propoſit. colligentur ex alibi à nobis dictis.

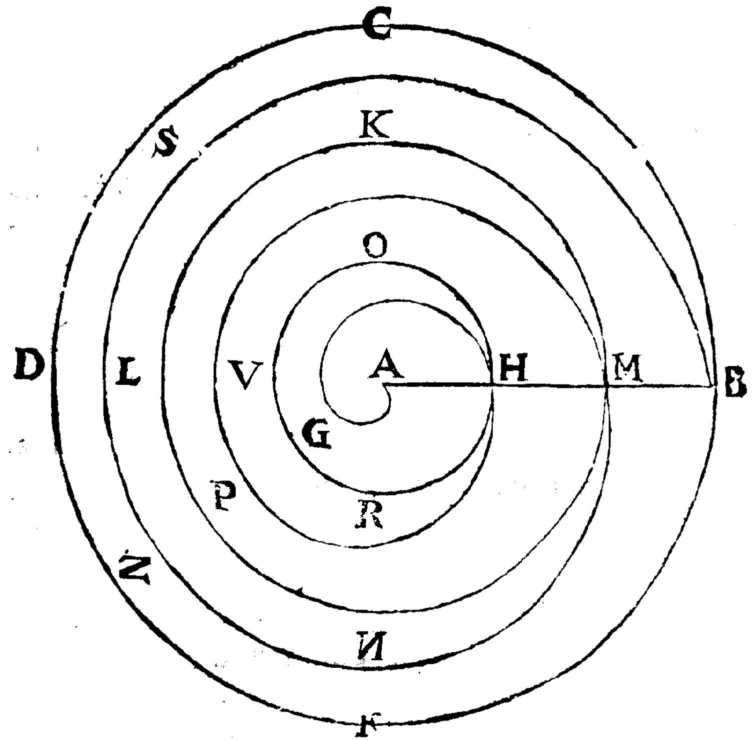
PROPOSITIO XXVI.

In ſpirali lineari primi circuli ſpatium helicum ad ſpatium helicum ſecundi circuli, erit vt tertia pars quadrati radij primi circuli, ad rectangulum ſub radio primi, & ſecundi circuli, vna cum tertia parte quadrati exceſſus radij ſecundi circuli ſupra radium primi. Spatium verò ſecundi circuli ad ſpatium tertium, erit vt dictum conſequens ad rectangulum ſub radio ſecundi, & tertij,

cum

cum tertia parte quadrati differentiæ horum radiorum, & sic deinceps in reliquis.

HÆc propositio ijsdem terminis, & medijs probatur à Caualerio in lib. 6. Geomet. Ind. proposit. 19. sed nos ipsam ostendemus ex proprijs ostensis. Supponamus ergo vt in proposit. 24. esse spatia, & circulos. Dico primum spatium AGH, esse ad secundum spatium HRPMH, vt tertia pars quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum tertia parte quadrati HM. Item secundum spatium dictum ad tertium MNZSBM, vt rectangulum MAH, cum tertia parte quadrati HM, ad rectangulum BAM, cum tertia parte quadrati MB, & sic in alijs. Etenim spatium AGH, est ex coroll. proposit. 7. $\frac{1}{3}$ circuli radij AH, nempe est ad ipsum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati AH, ad quadratum AH. Circulus radij AH, est ad circulum radij AM, vt quadratum AH, ad quadratum AM. Circulus radij AM, est ad secundum spatium, quod claudit, ex schol. 3. proposit. 17. vt quadratum AM, ad rectangulum MAH, vna cum tertia parte quadrati HM. Ergo ex æquali, erit primum spatium ad secundum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati HM. Pariter conuertendo, est secundum spatium ad secundum circulum, vt rectangulum MAH, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati HM, ad quadratum AM. Circulus radij AM, est ad circulum radij AB, vt quadratum AM,



AM, ad quadratum AB. Circulus radij AB, est ex dicto scholio, ad tertium spatium, vt quadratum BA, ad rectangulum BAM, cum $\frac{1}{3}$ quadrati BM. Ergo rursum ex æquali, erit secundum spatium ad tertium, vt rectangulum MAH, cum $\frac{1}{3}$ quadrati MH, ad rectangulum BAM, cum $\frac{1}{3}$ quadrati MB. Sic discurreretur in cæteris. Quare patet propositum.

N SCHO-

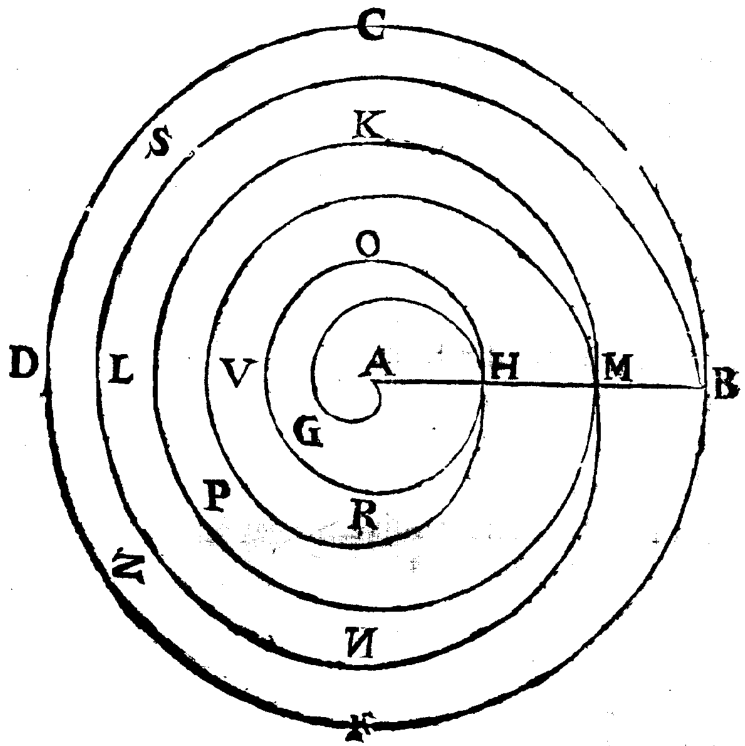
SCHOLIVM.

Colligemus ergo in numeris, eſſe primum ſpatium ad ſecundum, vt 1. ad 7. ſecundum ad tertium vt 7. ad 19. tertium ad quartum vt 19. ad 37. Hoc ad quintum vt 37. ad 61. & ſic diſcurrendo. Cum enim ſit primum ſpatium ad ſecundum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{3}$ quadrati HM: ſupponamus AH, eſſe 3. Ergo MA, erit 6. quadratum AH, erit 9. eius $\frac{1}{3}$ 3. rectangulum MAH, erit 18. $\frac{1}{3}$ quadrati MH, erit 3. Ergo primum ſpatium ad ſecundum erit, vt 3. ad 21. nempe vt 1. ad 7. Item rectangulum BAM, cum $\frac{1}{3}$ quadrati MB, erit 57. Ergo ſecundum ſpatium erit ad tertium vt 21. ad 57. nempe vt 7. ad 19. & ſic diſcurrendo in alijs. Diuidendo ergo erit primum ſpatium ad differentiam inter ipſum, & ſecundum, vt 1. ad 6. Secundum ad differentiam inter ipſum, & tertium, vt 6. ad 12. & ſic diſcurrendo augendo ſemper conſequens ſenario.

PROPOSITIO XXVII.

In ſpirali quadratica primi circuli ſpatium helicum ad ſpatium helicum ſecundi circuli erit, vt $\frac{1}{3}$ quadrati radij primi circuli, ad rectangulum ſub hoc, & ſecundi circuli radio, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati differentiæ horum radiorum. Spatium verò ſecundi ad ſpatium tertij, erit vt dictum

dictum conſequens, ad rectangulum ſub radijs ſecundi, & tertij, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati differentiæ horum, & ſic deinceps in reliquis.



Supponamus omnia, quæ in ſchemate ſuperiori, ſed ſpatia eſſe ſpiralis quadraticæ. Dico primum ſpatium ad ſecundum eſſe, vt $\frac{1}{3}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{3}$ quadrati HM. Secundum ad tertium, vt rectangulum

MAH, cum ½ quadrati HM, ad rectangulum BAM, cum ½ quadrati MB. Et ſic in reliquis. Hæc propoſitio probabitur eodem modo, quo probata fuit ſuperior, & ex ijſdem locis. Spatium enim AGH, circuli radij AH, eſt, ex coroll. propoſit. 9. ⅓: nempe eſt ad ipſum, vt ⅓ quadrati AH, ad quadratum AH. Circulus radij AH, eſt ad circulum radij AM, vt quadratum AH, ad quadratum AM. Hic eſt ad ſecundum ſpatium, ex ſchol. 3. propoſit. 17. vt quadratum AM, ad rectangulum MAH, cum ⅓ quadrati HM. Ergo ex æquali, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt ⅓ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum ⅓ quadrati HM. Eodem modo demonſtrabitur eſſe ſecundum ſpatium ad tertium, vt rectangulum MAH, cum ⅓ quadrati HM, ad rectangulum BAM, cum dimidio quadrati MB. Et ſic in alijs.

SCHOLIVM I.

Sed ad aſſignandas in numeris horum ſpatiorum rationes, magis inſeruiet ſequens regula. Nempe primum ſpatium, eſſe ad ſecundum, vt quadratum radij primi circuli, ad quadrata ipſius, & radij ſecundi. Secundum ad tertium, vt hæc quadrata, ad quadrata radiorum ſecundi, & tertij. Et ſic deinceps. Quod vero regula ſit vera, patet. Quia, vt dimidium ad dimidium, ſic duplum ad duplum. Duplum autem rectanguli MAH, & ½ quadrati MH, erunt quadrata MA, AH (Quia duo rectangula MAH, faciunt duo rectangula MHA, & duo quadrata AH; & duo rectangula MHA, cum quadratis AH, HM, faciunt quadratum MA:) & duplum rectanguli BAM, & ½ quadrati MB, faciunt quadrata BA, AM.

In numeris ergo adinueniemus, eſſe primum ſpatium ad ſecunduum, vt 1. ad 3. Secundum ad tertium, vt 3. ad 5. & ſic in infinitum ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab vnitate incluſiuè procedentium (quadrata enim AH, AM, AB, ſunt ex geneſi ſpiralium initio explicata 1. 2. 3. &c.) Diuidendo ergo erit primum ſpatium, ad differentiam inter ipſum, & ſecundum, vt 1. ad 2. Secundum ad differentiam inter ipſum, & tertium, vt 3. ad 2. & ſic infinitum.

SCHOLIVM II.

Iis expletis, quæ ad ſpatiorum helicum menſuram pertinent, in propoſit. 21. lib. 6. citat. Geom. Indi. pergit Caualerius conſiderare proportiones repertas inter cylindros, cylindricos, & conicos ſuper circulis, & ſpatijs ſpiralibus exiſtentes. Non ergo rem ingratam lectori fore arbitramur, ſi & nos in ſpatijs infinitarum ſpiralium exequemur illud idem, quod Caualerius in ſpatijs vnius dumtaxat linearis ſpiralis adimpleuit. Sed antequam hoc aggrediamur debemus ſupponere illud idem, quod ipſemet in dicta pro-

proposit. 27. ex sparsim probatis in sua geometria, deducit. Nimirum. *Quod si exponatur series spiralium, & circulorum deinceps à primis, in spatijs verò sub spiralibus, & volutis, cylindrici, & conici in eadem altitudine stantes intelligantur constituti tamquam in basibus, similiter & in circulis constituti esse cylindrici, & coni intelligantur: cylindri inter se, & cylindrici pariter inter se, siue ad cylindros comparati, siue coni inter se, & conici inter se, siue ad conos comparati eandem rationem, quam bases habebunt*. Huiusce afferti subiungit Caualerius probationem inquiens. *Patet hæc propositio, nam cylindrici, & conici in eadem altitudine constituti sunt inter se, vt bases: sunt autem prædicta solida per constructionem in eadem altitudine posita, ergo erunt inter se, vt ipsæ bases; Vocentur autem cylindri, & cylindrici, nec non conici eiusdem numeri cum spatijs, quibus insistunt, idest primus cylindrus, vel conus, qui est in primo circulo, secundus cylindrus, vel conus, qui est in secundo circulo tamquam in basi; primus cylindricus, vel conicus, qui est in spatio helico primi circuli tamquam in basi, secundus cylindricus, vel conicus, qui est in spatio secundi circuli, & sic deinceps*. Hæc Caualerius. Quibus consequenter ad nostram doctrinam addendum videtur, non solum cylindros, conos, cylindricos, conicos, primos, secundos, tertios, &c. fore nuncupandos secundum numerum, a quo denominantur circuli, & spatia super quibus insistunt, sed etiam primi, secundi, tertij gradus, &c. secundum quod spatia ipsamet sunt vel linearia, vel quadratica, vel cubica, &c. His explicatis sit.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Primus cylindricus ad primum conicum cuiuscunque gradus est, vt triplus numerus spiralis senario auctus, ad numerum spiralis.

ESto in schem. spiralium, spatium primum helicum AGH, cum sibi circumscripto primo circulo radij AH, & super circulo intelligamus cylindrum, super vero spatio spirali conicum eiusdem altitudinis cum cylindro. Dico cylindrum esse ad conicum, vt triplus numerus gradus spiralis senario auctus, ad numerum spiralis. V.g. in lineari, vt 9. ad 1. In quadratica, vt 12. ad 2. In cubica, vt 15. ad 3. & sic in infinitum, augendo semper antecedens ternario, consequens vero vnitate.

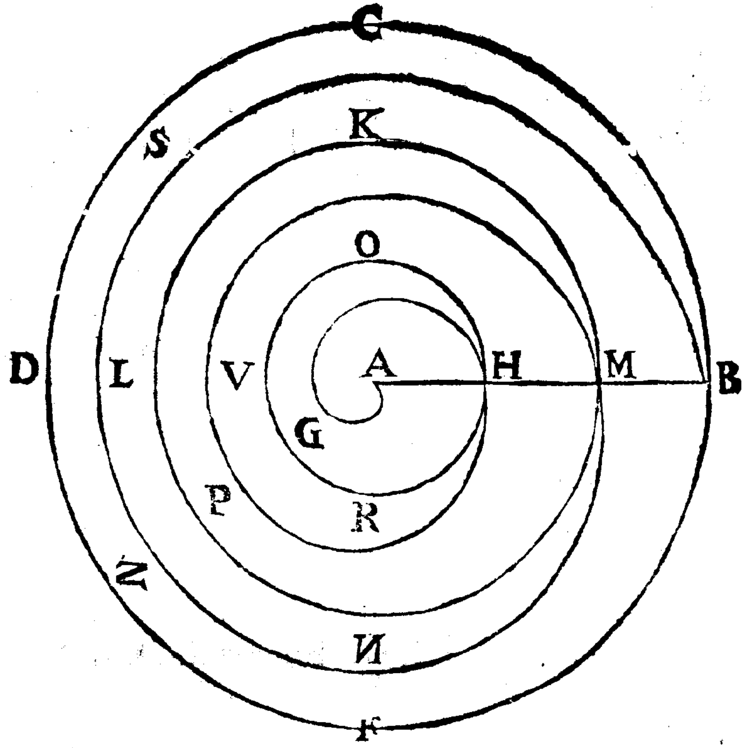
Nam, ex coroll. proposit. 9. cylindrus super circulo, ad cylindricum super spatio eiusdem altitudinis (quia sunt vt bases) est, vt numerus gradus spiralis binario auctus, ad numerum; nempe vt triplus ad triplum; scilicet vt triplus numerus senario auctus ad triplum numerum. Ergo erit ad conicum $\frac{1}{3}$ cylindrici, vt triplus numerus senario auctus, ad numerum. Quod erat ostendendum.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Cylindrus super circulo, ad conicum eiusdem altitudinis cum ipso existentem super quolibet aliorum spatiorum à primo cuiuscunque gradus, quod comprehendit. Erit vel vt factum sub triplo quadrato radij ipsius in differentiam potestatum ipsius, & radij circuli vnitate minoris: vel vt factum sub quadrato ipsius, & sub tripla differentia dicta, ad partem differentiæ potestatum radij ipsius, & circuli vnitate minoris duplici gradu altiorum potestate spiralis, se habentem ad ipsam, vt numerus gradus spiralis, ad numerum binario auctum.

ESto in schemat. eodem quilibet circulus radij AB, circumscriptus cuilibet spatio MZSBM, cuiuscunque numeri à primo, & cuiuscunque gradus, & esto AM, radius circuli vnius numeri inferioris. Dico cylindrum super circulo radij AB, esse ad conicum eiusdem altitudinis existentem super spatio MNZSBM, vel vt factum sub triplo quadrato AB, & sub differentia potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali: vel vt factum sub quadrato AB, & sub tripla dicta differentia, ad partem differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate gradus spiralis se habentem ad differentiam, vt numerus spiralis, ad numerum binario auctum. V.g. in spirali lineari, erit cylindrus ad conicum, vel vt factum sub quadrato triplo AB,



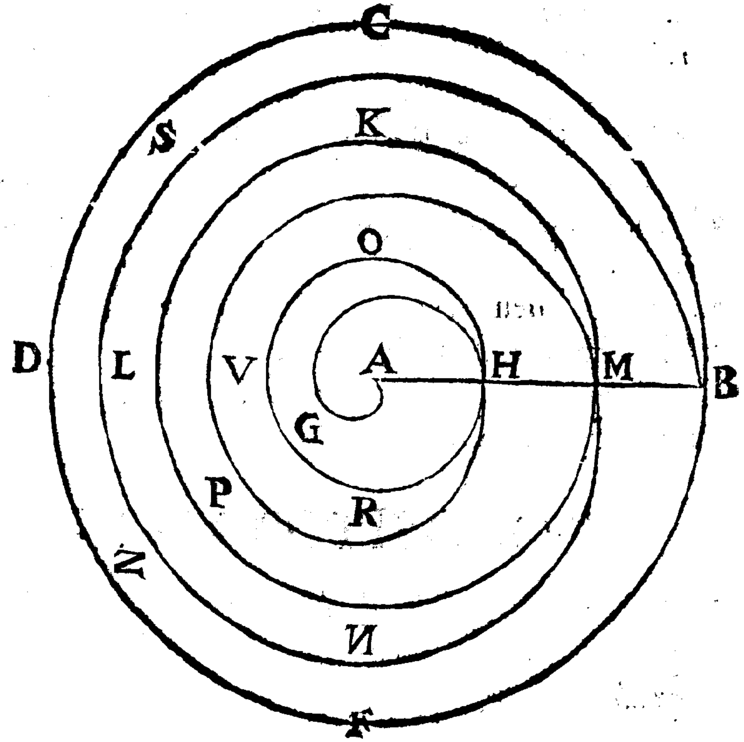
AB, in BM: vel vt factum sub quadrato AB, in triplam BM, ad ½ differentiæ cuborum AB, AM. In quadratica vero erit, vel vt factum sub quadrato triplo AB, in differentiam quadratorum AB, AM: vel vt factum sub quadrato AB, in triplam differentiam quadratorum AB, AM, ad ¾ differentiæ quadratoquadratorum AB, AM. Et sic in infin.

Quoniam enim ex schol. 2. proposit. 17. circulus

O radij

radij AB, est ad spatium MNLSBM, quod includit, vt factum sub quadrato BA, in differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad talem partem differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate spiralis, quæ se habeat ad talem differentiam, vt numerus spiralis ad numerum spiralis binario auctum; ergo etiam cylindrus super circulo existens, erit ad cylindricum super spatio existentem eiusdem cum ipso altitudinis, in dicta ratione; seu vt triplum ad triplum. Nempe cylindrus erit ad cylindricum, vt factum sub triplo quadrato AB, in dictam differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, ad triplicem partem differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate spiralis, se habentem ad dictam differentiam, vt numerus spiralis ad numerum binario auctum. Ergo cylindrus ad conicum cylindrici, erit, vt factum sub triplo quadrato BA, in dictam differentiam, ad partem differentiæ potestatum BA, AM, duplici gradu altiorum potestate spiralis se habentem ad ipsam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo patet primum. Cum verò factum sub triplo quadrato AB, in differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali, sit æquale facto sub quadrato BA, in triplam dictam differentiam potestatum BA, AM, eiusdem gradus cum spirali; patebit etiam secundum.

SCHOLIVM.



Verum, quoniam in spiralibus lineari, & quadratica assignatæ fuerunt peculiares rationes ad spatia; hinc est quod pro ipsis tradendæ sunt duæ particulares propositiones.

PROPOSITIO XXX.

In spirali lineari, erit cylindrus ad conicum vt in antecedenti propositione, vt triplum quadratum radij BA, ad rectangulum BAM, cum ⅓ quadrati BM.

PRopositio hæc patebit faciliter, quia cum ex schol. 3. citat. proposit. 17. sit etiam circulus ad spatium, vt quadratum BA, ad rectangulum BAM, cum ⅓ quadrati BM; vel vt triplum, ad triplum; nempe vt triplum quadratum BA, ad triplum rectangulum BAM, cum quadrato BM: discurrendo ad modum proposit. anteced. concludetur propositum.

PROPOSITIO XXXI.

In spirali quadratica, erit cylindrus ad conicum, vt triplum quadratum BA, ad rectangulum BAM, cum ⅓ quadrati BM.

PRopositio patebit ex eodem scholio cit. discurrendo superiorum ad instar.

SCHOLIVM.

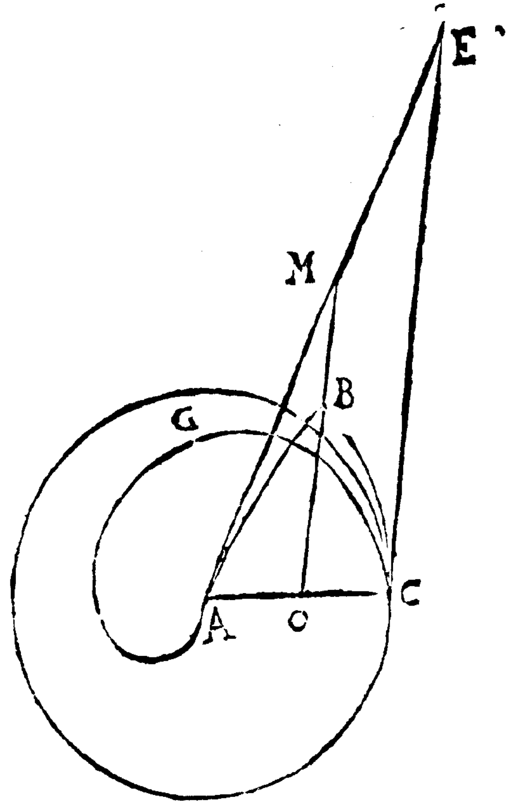
Posset forsitan lector in operibus eximij Torricellij versatus cogitare, analogiam, quam ipsemet assignauit

gnauit in propositione 17. de demen. parabolæ, inter parabolam quadraticam, & spiralem linearem, extendi, suo modo, ad infinitas parabolas, & ad infinitas spirales. Quia verò etiam nos hanc rem aliquando contemplati fuimus, & agnouimus huiusce asserti falsitem; ideo determinauimus in hac materia quid nobis occurrerit, manifestare.

Torricellius ergo in loco citato, supponens AC, in diagram. sequent. esse radium primi circuli circumscripti primo spatio spirali AGCA; ABC, esse parabolam quadraticam cuius basis eadem AC, diameter OB; AE, esse ipsam parabolam tangentem; & CE, esse parallelam OB: probauit excessum trianguli AEC, super parabola ABC, æqualem esse excessui circuli super spatio; & consequenter parabolam ABC, æqualem fore spatio AGCA. Quod quomodocunque probet Torricellius, ipsum sic ostendemus. OB, occurrat AE, in M. Ergo ex proposit. 33. prim. conic. MO, erit dupla BO: & consequenter EC, dupla MO, erit quadrupla BO. Cum ergo parallelogrammum duplum trianguli AEC, esset quadruplum parallelogrammi circumscripti parabolæ; erit triangulum AEC, parallelogrammi circumscripti parabolæ duplum; nempe erit ad ipsum, vt 6. ad 3. Sed cum ex quadratura parabolæ quadraticæ ab innumeris propemodum assignata, & etiam à nobis nouiter duobus modis in miscellaneo nostro hyperbolico, & parabolico, in schol. 1. proposit. 26. & in schol. 1. pro-

proposit. 28. sit parallelogrammum parabolæ circumscriptum ad ipsam, vt 3. ad 2. Ergo etiam triangulum A E C, erit ad parabolam A B C, ex æquali, vt 6. ad 2. seù, vt 3. ad 2: & ad excessum ipsius supra parabolam, vt 3. ad 2. Quæ rationes sunt illæ, quas habet circulus ad excessum, & ad spatium spirale, vt apparet ex proposit. 9. & ex eius corollario.

Posset ergo quispiam ex his cogitare, analogiam præsentem perpetuam esse in alijs spiralibus, & in alijs parabolis, ita vt secundum spatium spirale, nempe quadraticum, & excessus quadraticus, sint æquales parabolæ cubicæ, & excessui trianguli A E C, supra ipsam: & sic deinceps. Sed qui hoc arbitraretur ostendere, deciperetur vtique, quia hoc falsum esse in posterum manifestabimus. Sed vt lector percipiat, quæ dicturi sumus, debet quandam doctrinam à proposit. 50. citati miscellanei petere, in qua demonstrauimus. Quod. Si in qualibet infinitorum parabolarum sumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum recta ordinatim applicetur, diameterque ità producatur, vt pars extra parabolam sit ad partem diametri abscissam ab ordinatim applicata versus verticem, vt numerus parabolæ vnitate minutus ad vnitatem. Recta linea, quæ ab extremitate inuentæ lineæ ducitur ad illud punctum, quod sumptum fuerat, parabolam continget. Quæ omnia nil aliud sonant, nisi quod si A E, contingat parabolam quadraticam, M O, erit dupla O B: Si cubicam,



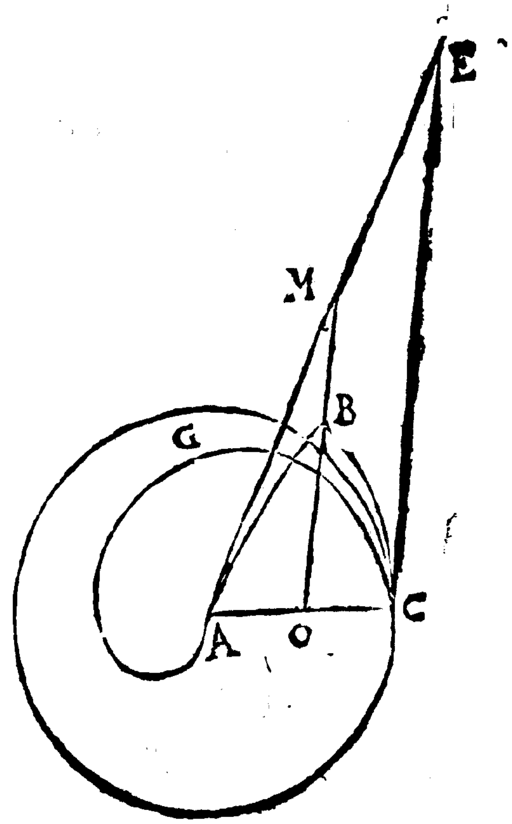
bicam, erit M O, tripla O B: si quadratoquadraticam, triplam: & sic deinceps. Vt M O, sit ad O B, vt numerus parabolæ ad vnitatem. Hæc in dicta proposit. probantur: videat ipsa lector in dicto loco. Sed ex his erit nobis.

PROPOSITIO XXXII.

Si in qualibet infinitarum parabolarum ducatur ordinatim applicata ad diametrum, & ab vna extremitate ordinatim applicatæ ducatur tangens parabolam, ab altera verò extremitate ducatur parallela diametro. Triangulum ab his, & ab ordinatim applicata formatum, erit ad parabolam, vt numerus parabolæ acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad numerum parabolæ.

IN schemate superiori esto quælibet parabola ABC, cuius ordinatim applicata ad diametrum OB, sit ipsa AC, AE, sit tangens, & CE, sit parallela diametro OB. Dico triangulum AEC, esse ad parabolam ABC, vt numerus parabolæ acceptus secundum numerum vnitate auctum, ad numerum. V.g. in parabola quadratica, vt 6. ad 2. seù, vt 3. ad 1. In cubica, vt 12. ad 3. seù vt 4. ad 1. & sic in infinitum. Occurrat OB, ipsi AE, in M. Ergo ex citata proposit. 50. Miscellanei hyperbolici, & parabolici, erit MO, ad OB, vt numerus parabolæ ad vnitatem. Ergo CE, dupla MO, erit ad BO, vt duplus numerus parabolæ ad vnitatem. Ergo triangulum AEC, erit ad parallelogrammum circumscriptum parabolæ ABC, vt numerus parabolæ ad vnitatem; nempe, vt numerus parabolæ acceptus secundum numerum vnitate

auctum



auctum, ad numerum vnitate auctum: Sed ex quadratura infinitarum parabolarum assignata ex Caualerio in proposit. 1. lib. 1. de infinit. parab. est parallelogrammum circumscriptum parabolæ ad ipsam, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Ergo ex æquali, erit triangulum AEC, ad parabolam ABC, vt numerus parabolæ acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum ad numerum parabolæ. Quod &c.

SCHOLIVM.

Erit ergo per conuersionem rationis, triangulum ad excessum ipsius supra parabolam, vt dictus numerus parabolæ acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad numerum parabolæ acceptum secundum numerum parabolæ. Vel clarius, erit triangulum ad parabolam, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad vnitatem; nempe in quadratica, vt 3. ad 1. in cubica, vt 4. ad 1. & sic deinceps. Et ad excessum trianguli supra parabolam, vt dictus numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Nempe in quadratica, vt 3. ad 2. In cubica, vt 4. ad 3. Et sic in infinitum.

Non ergo seruatur analogia inter infinitas parabolas, & infinitas spirales. Nam vtique est triangulum ad parabolam quadraticam, & ad excessum ipsius supra parabolam, vt primus circulus circumscriptus spatio spirali lineari ad ipsum spatium, & ad excessum supra ipsum; at non sic est in alijs: sed in spirali quadratica, est ex proposit. 9. & ex eius corollario, circulus ad spatium, vt 4. ad 2. & non, vt 4. ad 1. vt triangulum ad trilineum cubicum; & sic in alijs.

Sed vnum adnimaduertetur, quod equidem haud spernendum videtur, & est, quod in eadem ratione sunt

sunt in qualibet parabola, triangulum AEC, ad parabolam ABC, & parallelogrammum semiparabolæ OBC, circumscriptum ad trilineum, quod est excessus parallelogrammi supra semiparabolam. Nam vtrumque est ad vtrumque, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Pariter in eadem ratione sunt triangulum AEC, ad excessum sui supra parabolam, & parallelogrammum semiparabolæ circumscriptum ad ipsam; nempe, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum.

DIGRESSIO.

Dum hæc, quæ scripsimus sub prælo essent, accepimus epistolas à nobilissimo Geometra Petro Parelo Carauaggio Mediolanensi, ac Mediolani commorante, ad nos trasmissas, datas sub die 21. Iulij anni præsentis 1660. in quibus (prius à nobis de subiecto nostræ impressionis monitus) sic loquebatur. *Vedo per la sua, che pone al Torchio vn' opera delle infinite spirali. Io credo, che V. R. hauerà notitia delle opere de Gio: Vallisio stampate in Oxonio, che argomenta con il methodo de gl' infiniti, e parla delle spirali.* His auditis, cogitabamus Vuallisium nobis præiuisse, ac opusculum nostrum de Infinitis spiralibus ad oleum, piperque demittendum. Porrò libro Vuallisij frustra apud bibliopolas, aut alios Venetijs quæsito, confugimus ad Excellentissimum Andream Morettum Pataui, tunc manentem, ipsum rogantes, opus prædictum, si

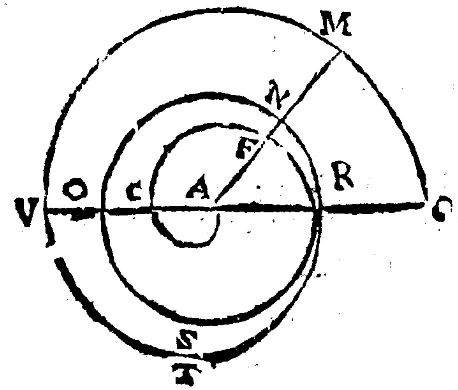
 apud

apud ipsum esset, nobis accommodare. Nec euanuit spes nostra. Ille etenim Excellentissimus vir summa, qua pollet humanitate, vota nostra expleuit, librumque ab ipso mutuo recepimus. Quo vix inspecto, statim occurrit nobis tractatus de sectionibus conicis, &c. protinusque obseruauimus in ipsa dedicatione afferri validissimum testimonium pro indiuisibilibus. Ita namque ait. *Opus ipsum quod attinet; videbitis me statim ab initio Cauallerij Methodum indiuisibilium, quasi iam à Geometris passim receptam tam huic, quam tractatui sequenti (qui huic gemellus est) substernere &c.* Audi Tacquet, & amplius noli de indiuisibilibus iudicare. Methodus namque illa indiuisibilium, *quam pro legitima, ac geometrica admittendam non existimas*, à geometris passim recipitur. Desine quæso, adducendo argumentationis per indiuisibilia exemplum, exclamare. *Quem conuincat isthæc ratiocinatio.* Nam iuxta Vuallisium (qui pluribus in locis perhonorifice de indiuisibilibus loquitur) conuincit passim geometras.

Opus ergo Vuallisij percurrentes, animaduertimus ipsum anno 1656. circa aliquot laborasse, circa quæ Caualerius in exercitationibus geometricis 1647. & nos in opere de infinitis parabolis anno 1659. Sed non pœnituit illa, quamuis ipso posteriores, euulgasse: namque procedimus methodo à sua totaliter diuersa; & iuxta nobis connaturale, geometrica geometricè pertractauimus.

Porrò valde gauisi sumus dum inspeximus, infinitas

nitas spirales ab illo acutissimo viro explanatas, diuersissimas fore toto cælo ab ijs, quas nos meditati eramus. In scholio etenim subnexo proposit. 45. Arithmeticæ infinitorum, in quo suas infinitas spirales explicat, supponit ipsas diuersificari ex diuersa proportione in spirales incidentium ab initio ad inuicem secundum multiplicatam proportionem angulorum. V. g. in schem. sequenti, si FA, incidens in spiralem sit ad AC, itidem in spiralem incidentem, vt angulus NORA, ad angulum OSRA; nempe vt arcus NOSR, ad arcum OSR; Secundum ipsum, spatium ACFRA, est primum spatium spirale. Si vero sit FA, ad AC, in duplicata proportione prædicti anguli ad prædictum angulum, seù dicti arcus ad dictum arcum. Spatium erit secundum. Si in triplicata, tertium, &c. At in nostris spiralibus res è contra accidit.



dit.

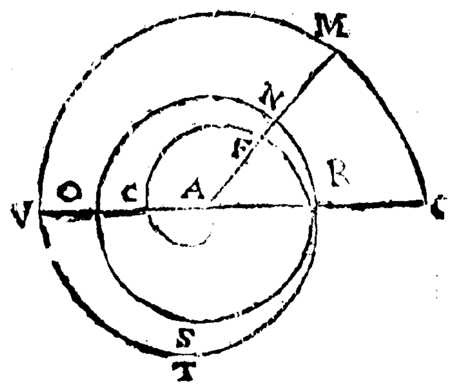
dit. Nam incidens ad incidentem eſt in ſubmultiplici proportione anguli ad angulum, ſeù arcus ad arcum. In ſpirali etenim quadratica, cum ex propoſit. prim. ſit quadratum FA, ad quadratum AC, vt arcus NOSR, ad arcum OSR, erit FA, ad AC, in ſubduplicata proportione arcus ad arcum. Et ſic conſequenter in cubica, in ſubtriplicata, & ſic deinceps. Procedentes ergo per diuerſa principia, & circa diuerſiſſima laborantes, diuerſiſſima etiam colligimus. Ipſe etenim putans incidentes in ſpiralem augeri ſecundum multiplicem proportionem angulorum, ſeù arcuum, arguendo ſuo modo colligit ſpatia ſpiralia minui. Secundum enim ipſum, circulus circumſcriptus primo ſpatio, ſeù primi generis eſt ad ipſum, vt 3. ad 1. Ad ſpatium ſecundi generis, vt 4. ad 1. Ad tertij, vt 5. ad 1. & ſic in infinitum. Nos vero ſupponentes incidentes in ſpirales augeri in ſubmultiplici proportione angulorum, ſ. ù arcuum, deduximus ſpatia ſpiralia augeri. Circulus enim ad ſpatium primi generis eſt, vt 3. ad 1. Ad ſpatium ſecundi, vt 4. ad 2. Ad tertij, vt 5. ad 3. & ſic in infinitum. Vndè in ſuis ſpiralibus circulus eſt ad ſpatium ſpirale, vt numerus gradus ſpatij binario auctus ad vnitatem: at in noſtro eſt, vt numerus binario auctus ad numerum. Et vniuerſaliter ipſe exiſtimat proportionem circuli ad infinita ſpatia ſpiralia eſſe eandem congruenter cum proportione parallelogrammi ad infinita trilinea parabolica ſibi inſcripta. At nos in noſtris ſpiralibus infinitis adinuenimus,

uenimus, proportionem circuli ad eadem infinita ſpatia (ſubintellige ſemper primæ reuolutionis) eſſe eandem cum congruenti, & explicata proportione trianguli ad exceſſus ſupra infinita trilinea parabolica ſibi inſcripta. Quæ proportiones in ſpirali Archimedea dumtaxat conueniunt. In ipſa etenim ſolummodo, tam parallelogrammum ad trilineum, quam triangulum parallelogrammi dimidium ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, ſunt vt 3. ad 1. In reliquis vero, parallelogrammum eſt ad trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus ad vnitatem: triangulum vero eſt ad exceſſum ſui ſupra trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum. Cum ergo infinitæ ſpirales Clariſſimi Vualliſij ſic diſcrepent à noſtris, prodeant etiam hæ.

Porrò quis recolens dicta in præſenti digreſſione, & modum ſupra explicatum, quo Clariſſimus Torricellius conſiderauit analogiam inter ſpiralem linearem, & parabolam quadraticam, poſſet rationabilius, quam ibidem factum fuit, cogitare, analogiam illam, quam ſupra diximus nequaquam ſeruari inter infinitas ſpirales, & infinitas parabolas, vtique locum habere in infinitis parabolis, & in infinitis ſpiralibus Vualliſij. Nam ex ſupra dictis, patet, in his omnibus eaſdem proportiones ſeruari. Ex ſtatim enim ſupra dictis liquet, circulum ad infinitas ſpirales Vualliſij eſſe ſecundum ipſum, vt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad vnitatem: & ad exceſſum

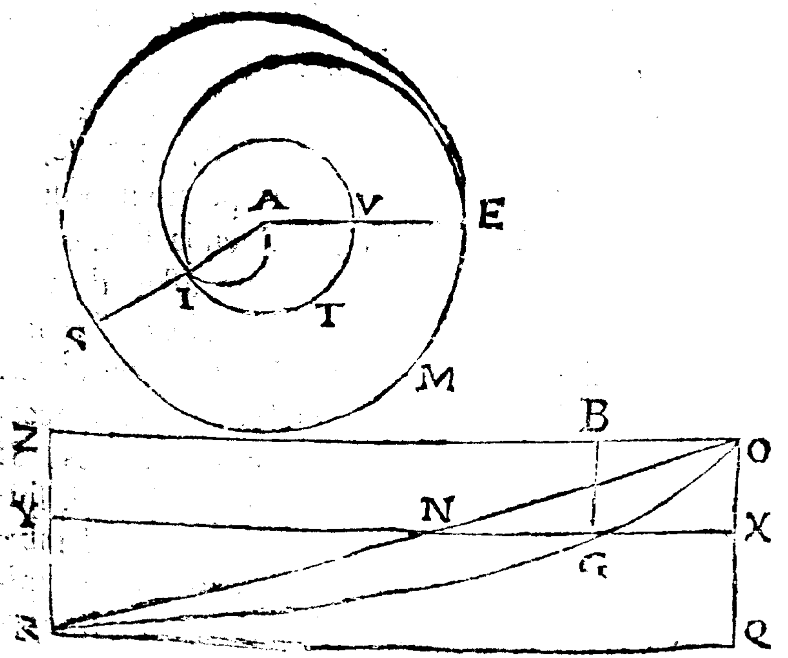
cessum ipsius supra spatia, vt numerus binario auctus ad numerum vnitate auctum. Ex dictis vero in schol. proposit. 32. constat in schem. illius, esse triangulum AEC, ad parabolam ABC, vt numerus parabolæ vnitate auctus (nempe, vt numerus spiralis binario auctus) ad vnitatem: & ad excessum ipsius supra parabolam, vt numerus vnitate auctus, ad numerum. Easdem ergo proportiones habent triangulum ad excessum, & ad parabolam, & circulus ad excessum, & ad spatium. Sicuti ergo, posset quis dicere, Torricellius patefecit similes analogias inter triangulum AEC, & excessum ipsius super parabola quadratica ABC, & inter circulum, & excessum ipsius supra spatium spirale lineare AGC, sic forsitan seruabitur similis analogia inter alias explicatas figuras. Sed similes discursus erronei sunt censendi, vt infra manifestabimus.

Sed prius Vuallisij infinitæ spirales, earumque genesis clarius sunt explicandæ, discrimenque inter nostras, & suas dilucidius est assignandum. Diximus initio operis, spirales nostras generari ex duplici motu eodem tempore peracto, nempe in schemate sequenti, puncti A, æquabiliter semper lati per semidiametrum AR; & semidiametri AR, circa centrum A, puncto R, describentis peripheriam vel æquabiliter, vel ita vt circumferentia peracta ad circumferentiam, vel angulus ad angulum esset, vt variæ temporum potestates ad inuicem. Hinc oriebatur, quod AC, AF, in spiralem incidentes



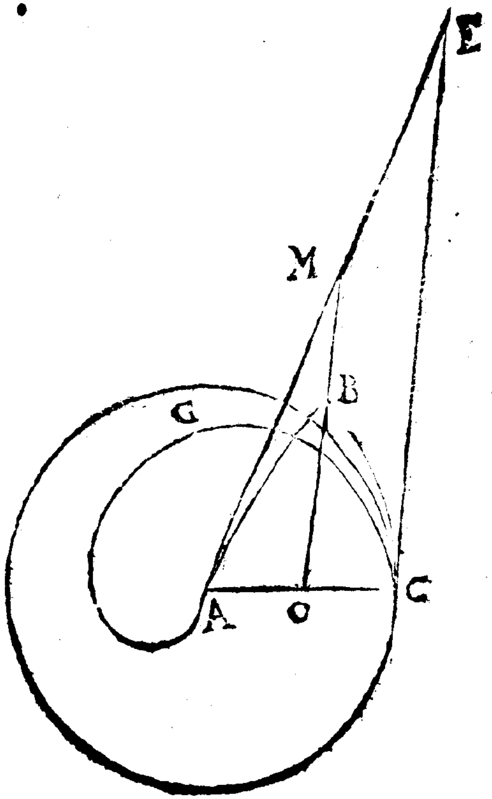
erant ad inuicem in submultiplici proportione arcuum, seu angulorum. Cum enim ex proposit. pri. sit arcus ad arcum, vt potestas AC, eiusdem gradus cum spirali ad similem potestatem AF; patet AC, ad AF, esse in dicta submultiplici proportione. Vuallisij pariter infinitæ spirales concipiendæ sunt creari ex duplici motu eorundem mobilium, ast modis contrarijs. Motus enim semidiametri per circumferentiã concipiendus est semper æquabilis: at motus puncti A, per semidiametrum, vel æquabilis, vel variè acceleratus secundum varias temporum potestates. Si ergo vterque motus erit æquabilis, genita erit spiralis archimedea. Si vero motus puncti à acclerabitur secundum quadrata temporum, erit secunda spiralis. Si vt cubi, tertia. Et sic deinceps. Hinc ergo fiet, AC, ad AF, esse in multiplici proportione arcus ad arcum; seu anguli, ad angulum, vt ait Vuallisius.

Ex hac doctrina habebimus, quod in schemat. seq. circumscripto spirali circulo, & semidiametro AV, ducto arcu VTI. Erit peripheria EMSE, ad arcum VTI, in ratione composita ex ratione AE, ad AV, & ex ratione vel AE, ad AV, in spirali lineari; vel minoris mediarum extremarum continuè inter EA, AV, quarum numerus sit vnitate minor numero spiralis, ad AV. V.g. in quadratica, ex ratione AE, ad AV, & mediæ



proportionalis inter AE, AV, ad AV. In cubica, ex rationibus AE, ad AV, & minoris duarum mediarum continuè proportionalium inter AE, AV, ad AV; & sic deinceps. Quod patet, quia circumferentia EMSE, ad VTI, habet rationem compositam ex ratione ipsius ad VTIV (nempe EA, ad AV) & VTIV, ad VTI; nempe EMSE, ad EMS. Sed in aliis spiralibus à lineari proportio EMSE, ad EMS. est sub multiplex proportionis EA, ad AI, seu AV, secundum explicatum gradum spiralis: vnde est in quadratica, vt media inter EA, AV, ad AV: in cubica, vt minor duarum mediarum ad AV, &c. Ergo ratio EMSE, ad VTI, componetur ex ratione EA, ad AV, & dictarum mediarum ad AV.

His perceptis. Ostendemus in schemate sequenti, non seruari dictam analogiam inter circulum radij AC, & excessum ipsius supra spatium spirale AGC, & inter triangulum AEC, & excessum ipsius supra parabolam ABC. Hoc autem ostendemus in spirali quadratica, & parabola cubica. Nam si dicta analogia curreret, mente centro A, interuallo AO, intellecta peripheria, esset CE, ad ME, vt circumferentia radij AC, ad circumferentiam descriptam in ipso excessu contentam inter O, & punctum in spirali. Sed ratio circumferentiæ radij AC, ad dictam circumferentiam componitur ex ratione CA, ad AO, & mediæ proportionalis



inter CA, AO, ad ipsam AO. Ergo etiam ratio CE, ad MB, ex ijsdem componeretur rationibus. Porrò ratio CE, ad MB (de foris sumpta MO,) componitur quoque ex rationibus CE, ad OM, & huius ad MB: & vt CA, ad AO, sic CE, ad OM. Ergo OM, ad MB, esset, vt media proportionalis inter CA, AO, ad AO.

Quod

Quod vtique est falsissimum. Nam OM, ad MB, est ex citat. prop. 50. Miscel. hyperb. &c. vt 3. ad 2: inter autem CA, duplam AO, & AO, nempe inter 4. & 2. non est 3. medium proportionale. Non ergo seruatur dicta analogia: & tamen si vera sunt, quæ Vuallisius scripsit (nobis enim diuersa methodo à sua adhuc non constat) est semper eadem proportio.

In præsenti ergo opusculo comprehensa, sunt ea, quæ quintò tibi proponimus, benigne lector, percurrenda. In quatuor primis nostris operibus antea elaboratis quamplurimos, progressu temporis, errores animaduertimus: non paucis etiam præsens est aspersum. Ast nec illi, nec isti, vt plurimum, materiam labefactant, nec sensum præcipuè intentum euertunt, adeovt lectori hærendum sit in assertorum intelligentia. Errores versantur sæpe sæpius vel in locutione latina, vel in alijs rebus non magni momenti. Hos errores dona nobis quæso, benigne lector. Nec putamus te experiri inclementem, præcipuè si in typographijs aliquando te exercueris. Crede nobis, ingens tormentum authores exagitat in ipsa impressione; & plus laboris adinuenitur in hac, quam in compositione ipsamet, in rebus geometricis præsertim. Oscitantia etenim, improbitas, & imperitia artificum sic torquent, & angunt authores, vt non paucis vicibus cogitent momento disperdere, quæ tempore prolixo, & magnis laboribus collegerunt. Porrò omnia hæc, & alia innumera ab impres-

pres-

preſſione ſunt inſeparabilia. Suſtine ergo clementer, benigne lector, errores eos, quibus noſtra opuſcula apparent conſpurcata: & ſicuti, fauente Deo, potes à nobis alia rationabiliter in poſterum, immo quamprimum exſpectare; ità nimis à ſcopo aberrares, ſi ea abſque erroribus proſilire, cogitares. Vale.

FINIS.